

ANILLOS PLANETARIOS EXCÉNTRICOS MODELO DINÁMICO APLICADO A LOS SISTEMAS OBSERVADOS

Autor: Diego Martin Tanoni

Director: Dr. Mario Melita



Esquema de la presentación

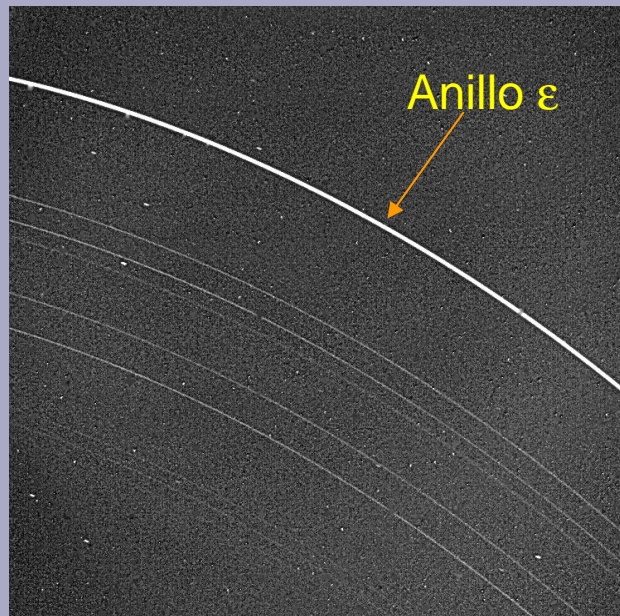
- Situación física
- Desarrollo teórico del problema
- Datos observacionales
- Tratamiento analítico de los datos
- Conclusiones



Situación física

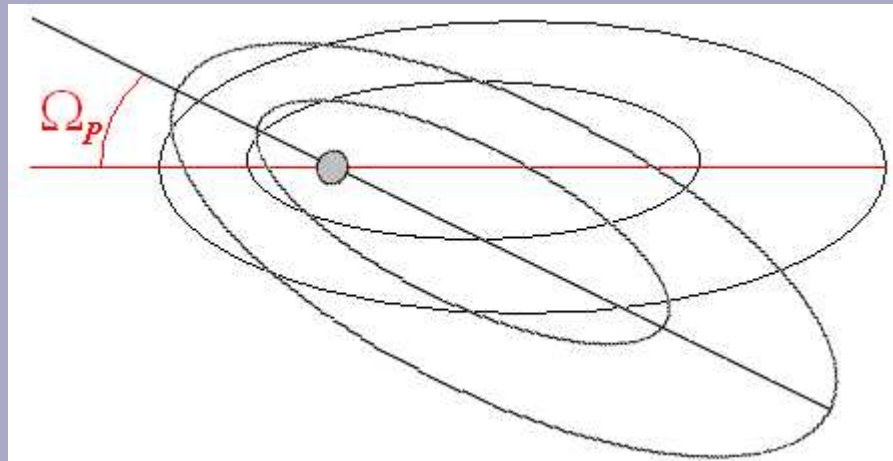
Ubicación

**Imagen de los anillos interiores
de Urano tomada por el Voyager 2**



Situación física

Esquema de la precesión uniforme



Situación física

Representación de la precesión uniforme

$$\Omega \approx 18 \text{ 1/día}$$

$$\Omega_p \approx 2,3 \times 10^{-2} \text{ 1/día}$$



Hubble Space Telescope

Erich Karkoschka – University of Arizona

Desarrollo teórico

Interacciones a considerar

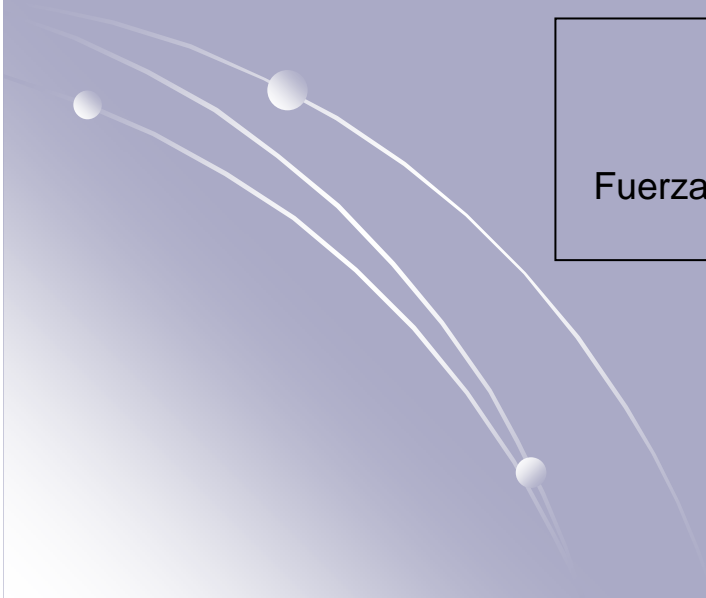
- Potencial central del planeta
- Potencial debido a los satélites y la auto-gravedad

$$\psi(r, \theta)$$

- Interacciones de contacto entre las mismas partículas del anillo (colisiones)

$$\vec{F} = (F_r, F_\theta)$$

Fuerza por unidad de masa



Desarrollo teórico

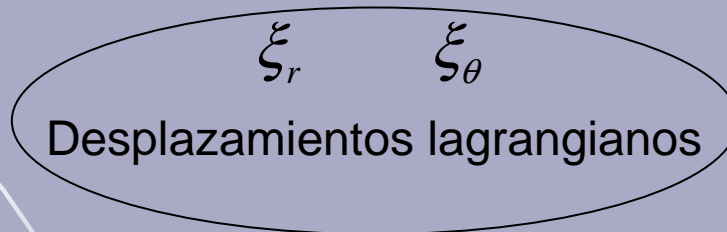
Perturbaciones del movimiento circular

$$r_0 (\theta - \theta_0) = \xi_\theta$$

$$r = r_0 + \xi_r$$

$$r_0 = \text{constante}$$

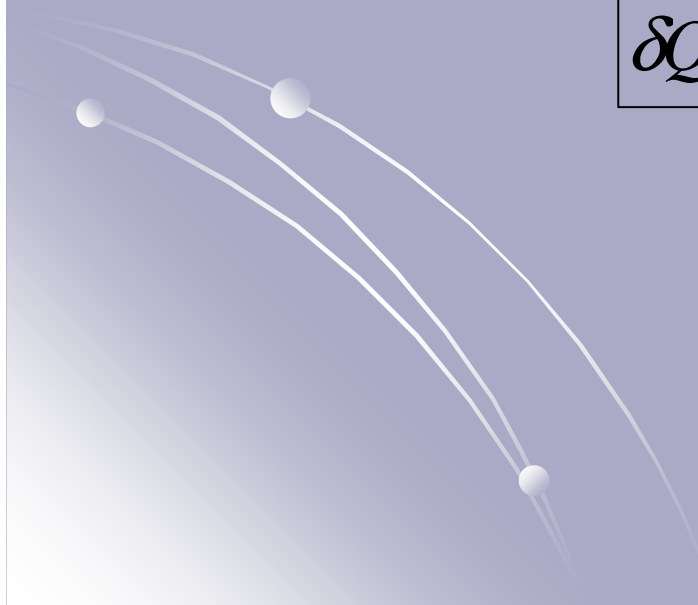
$$\theta_0 = \Omega(r_0)t + \beta$$



Desarrollo teórico

Variación de una magnitud física Q siguiendo a una partícula

$$\Delta Q = Q(\vec{r}_0 + \vec{\xi}) - Q_0(\vec{r}_0) \cong \delta Q + \vec{\xi} \cdot \nabla_{\vec{r}_0} Q_0(\vec{r}_0)$$

$$\delta Q = Q(\vec{r}_0) - Q_0(\vec{r}_0)$$
A diagram in the bottom-left corner of the slide shows three curved trajectories, each represented by a thin white line. Three small white circles, representing particles, are positioned at different points along these trajectories. The trajectories appear to be part of a larger field or flow, curving downwards and to the right.

Desarrollo teórico

Ecuación de movimiento de los desplazamientos Lagrangianos

$$\ddot{\xi}_r - 2\Omega\dot{\xi}_\theta + 2\xi_r r_0 \Omega \frac{d\Omega}{dr_0} = f_r - \Delta \left(\frac{\partial \psi'}{\partial r} \right)$$

$$\ddot{\xi}_\theta + 2\Omega\dot{\xi}_r = f_\theta - \Delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi'}{\partial \theta} \right)$$


$$f_r = \Delta(F_r)$$

$$f_\theta = \Delta(F_\theta)$$

$\psi' =$ Potencial debido a los satélites
y la autogravedad

Desarrollo teórico

Frecuencia de precesión

Ecuación de la elipse para excentricidades pequeñas $\varepsilon \ll 1$

$$r(\theta) = a + a\varepsilon \cos(\theta - \eta)$$



Define la ubicación de los semiejes

Solución propuesta

$$r = r_0 + \xi_r$$



$$r = r_0 + A(r_0) \cos[\Omega(r_0)t - (\Omega_p t - \beta)]$$

$$\Omega(r_0) = \sqrt{\frac{MG}{r_0^3}}$$

Identificación

$$A(r_0) = r_0 \varepsilon(r_0)$$

Desarrollo teórico

Frecuencia de precesión

Apartamiento de la geometría del planeta central de la forma esférica



El movimiento describe una órbita elíptica de pequeña excentricidad que precede con una frecuencia ω_{prec}

$$\omega_{prec}(r_0) = \frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}} \left(\frac{R_P}{r_0} \right)^2$$

J_2 depende de la geometría del planeta y R_P es su radio medio



Desarrollo teórico

Frecuencia de precesión uniforme

$$\Omega_P = \frac{\int_{r_1}^{r_2} \Omega(r_0) \omega_{prec}(r_0) A(r_0) \Sigma(r_0) dr_0}{\int_{r_1}^{r_2} \Omega(r_0) A(r_0) \Sigma(r_0) dr_0}$$

Observación: Ω_P toma un valor intermedio entre $\omega_{precm\acute{a}x}$ y $\omega_{precm\acute{i}n}$

Desarrollo teórico

Condición de precesión uniforme

Se obtiene

$$\left(\Omega_P - \omega_{prec}(r_0) \right) A(r_0) = \frac{g_{ext}}{\Omega(r_0)}$$

$$\text{Siendo: } g_{ext} = F_{cr} + g_D(r_0) + 2F_{c\theta}$$

Condición de precesión uniforme

Precesión diferencial

$$g_D(r_0) = 2G \int_{r_1}^{r_2} \frac{I(q(r_0 \hat{r})) \Sigma(r_0 \hat{r})}{r_0 - r_0'} dr_0'$$

$$I(q) = \frac{1}{q\sqrt{1-q^2}} \left(1 - \sqrt{1-q^2} \right)$$

$$q(r_0) = r_0 \frac{d\varepsilon}{dr_0}$$

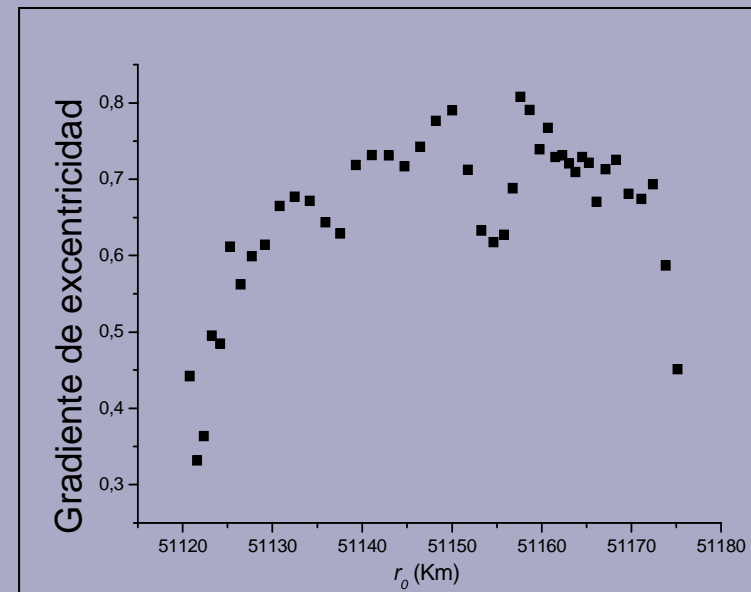
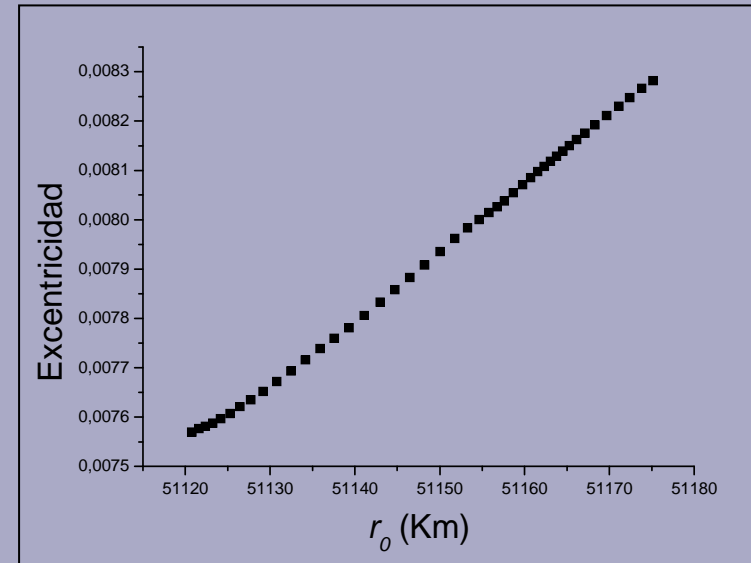
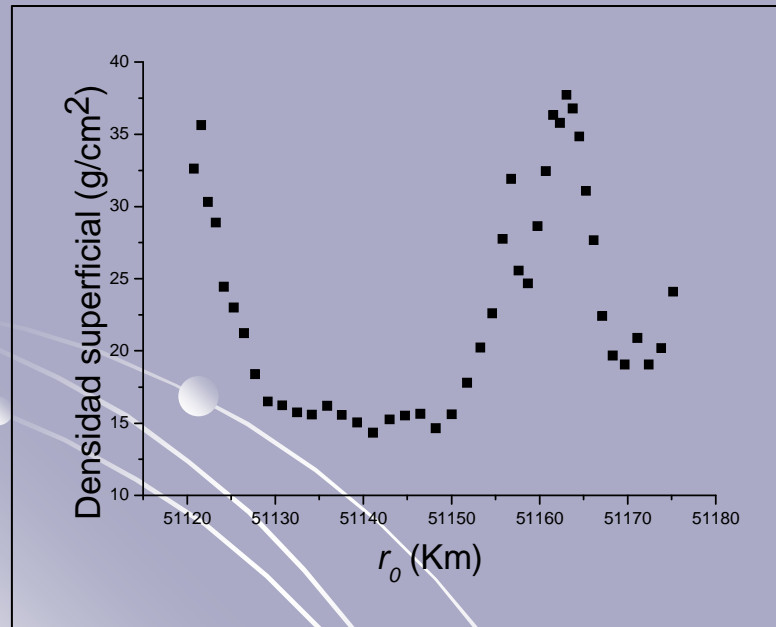
r_1 y r_2 son los radios interior y exterior del anillo respectivamente

$$F_{cr} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r \cos(\varphi_0) d\varphi_0$$

$$F_{c\theta} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\theta \sin(\varphi_0) d\varphi_0$$

Datos de observaciones

Referencia: Graps, A.L; Showalter, M.R; Lissauer, J.J; Kary, D.M. 1995. *Optical depth profiles and streamlines of the uranian e ring.* *Astronomical Journal*, 109, 2262-2273.



Tratamiento analítico de los datos

El término de autogravedad

$$g_D(r_0) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{F(r_0')}{r_0 - r_0'} dr_0' \quad (r_1 \leq r_0 \leq r_2) \quad F(r_0') = 2GI(q(r_0'))\Sigma(r_0')$$

Definición

$$x(r_0) = \frac{2r_0 - r_2 - r_1}{r_2 - r_1} \quad G(x') = F\left(\frac{x'(r_2 - r_1) + r_2 + r_1}{2}\right)$$



$$g_D(r_0) = \int_{-1}^1 \frac{G(x')}{x(r_0) - x'} dx' \quad (-1 \leq x(r_0) \leq 1)$$

Datos

Se conoce G en para una cantidad finita de la variable x'

Tratamiento analítico de los datos

El término de autogravedad

Primer método: siguiendo la idea de la integral de Riemann

Definición

$$H(r_0, x') = \frac{G(x')}{x(r_0) - x'}$$

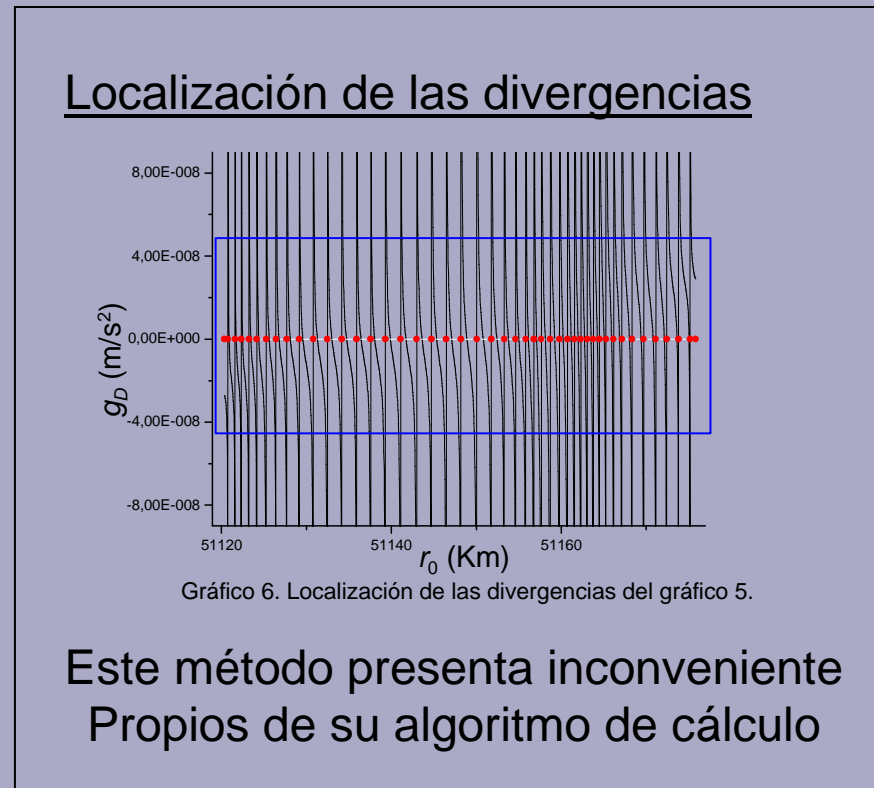
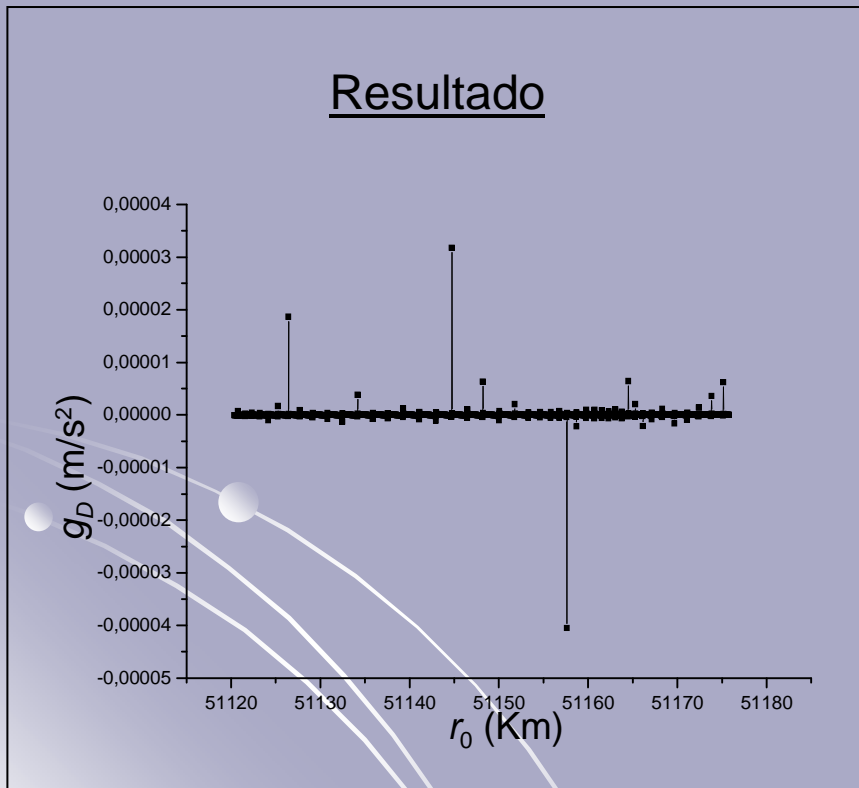
Cálculo

$$g_D(r_0) = \sum_{i=1}^k \frac{H(r_0, x_i) + H(r_0, x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1})$$

Tratamiento analítico de los datos

El término de autogravedad

Primer método: Resultado



Tratamiento analítico de los datos

El término de autogravedad

Segundo método: Serie de Fourier

$$g_D(r_0) = \int_{-1}^1 \frac{G(x')}{x(r_0) - x'} dx' \quad (-1 \leq x(r_0) \leq 1)$$

Cambio de variables

$$x' = \cos \theta$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad H(\theta) = G(x'(\theta))$$

→

$$g_D(r_0) = \int_0^\pi \frac{H(\theta) \sin \theta}{x(r_0) - \cos \theta} d\theta$$

Desarrollo en serie de Fourier

$$H(\theta) = \sum b_n \sin(n\theta) \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi H(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

Tratamiento analítico de los datos

El término de autogravedad

Segundo método: Serie de Fourier

$$g_D(r_0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n I_n(r_0)$$

$$I_n(r_0) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n\theta) \sin \theta}{x(r_0) - \cos \theta} d\theta = \pi \cos(n\alpha) \quad (\alpha = \arccos x(r_0))$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} H(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

Se realiza una aproximación lineal a trozos con los valores conocidos

$$H(\theta) = a_i \theta + p_i \quad (\theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i)$$

Tratamiento analítico de los datos

El término de autogravedad

Tercer método: Linealización a trozos

$$g_D(r_0) = \int_1^{-1} \frac{G(x')}{x(r_0) - x'} dx' \quad (-1 \leq x(r_0) \leq 1)$$

Se realiza una aproximación lineal a trozos con los valores conocidos

$$G(x') = a_i x' + p_i \quad (x'_{i-1} \leq \theta \leq x'_i)$$

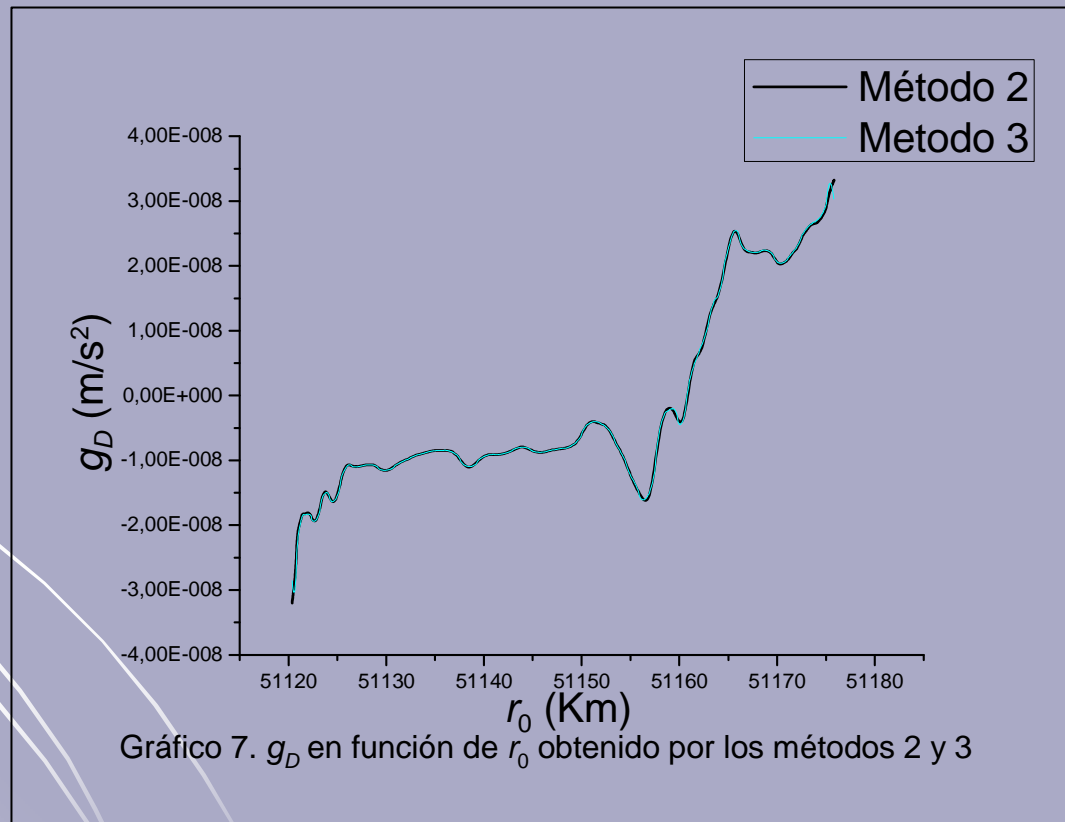
Cálculo

$$g_D(r_0) = \sum_{i=1}^k \left[-a_i (x_i - x_{i-1}) + (a_i x(r_0) + b_i) \ln \left| \frac{x_{i-1} - x(r_0)}{x_i - x(r_0)} \right| \right]$$

Tratamiento analítico de los datos

El término de autogravedad

Segundo y tercer métodos: Resultados

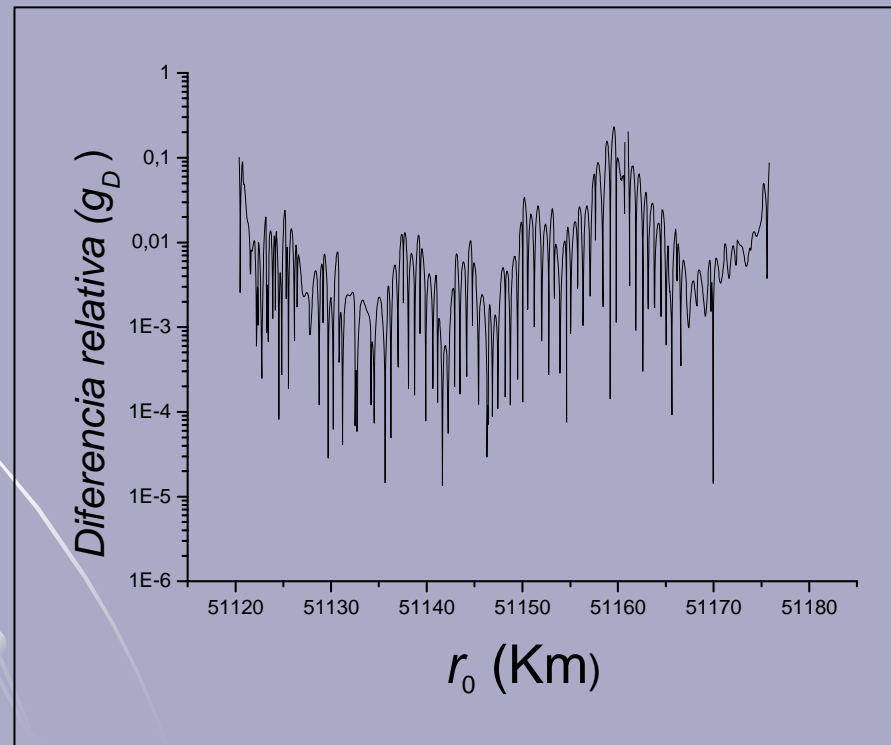


Tratamiento analítico de los datos

El término de autogravedad

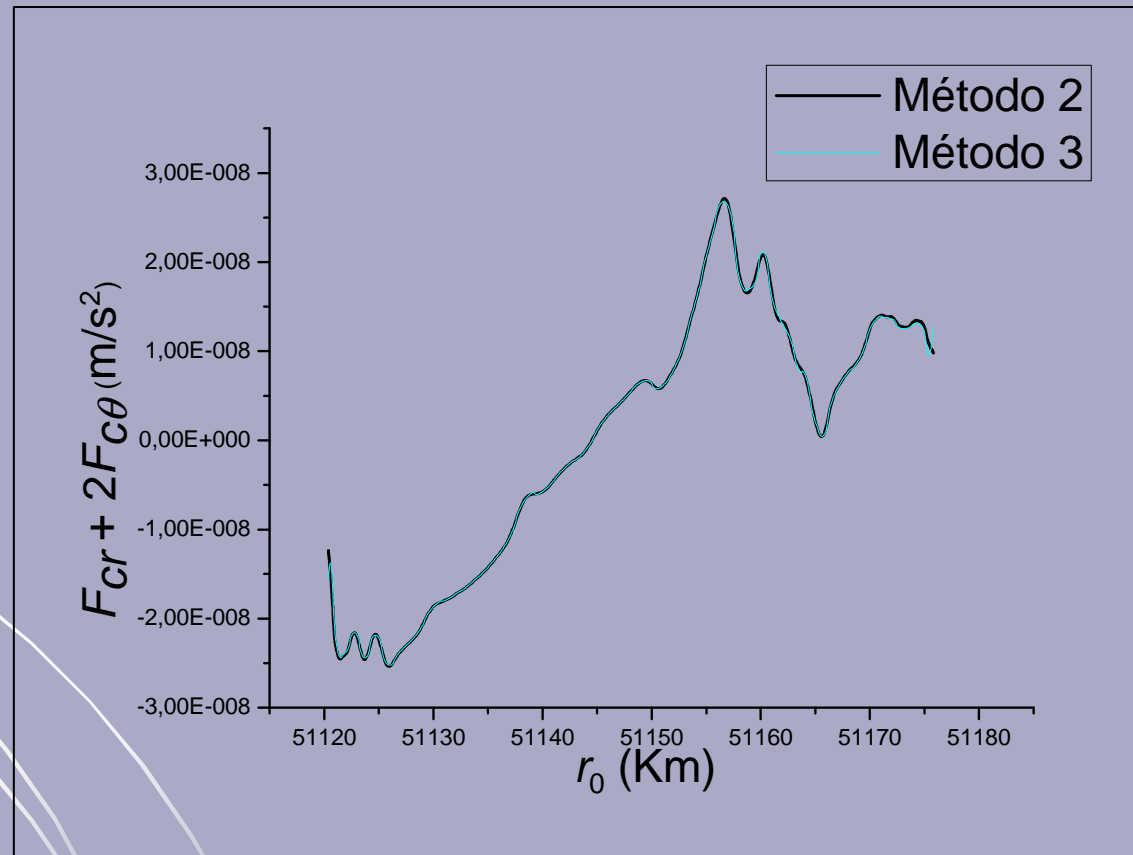
Segundo y tercer métodos: Comparación

$$Diferencia\ relativa = \frac{(Método\ 3) - (Método\ 2)}{\frac{(Método\ 3) + (Método\ 2)}{2}} = 2 \frac{|(Método\ 3) - (Método\ 2)|}{|(Método\ 3) + (Método\ 2)|}$$



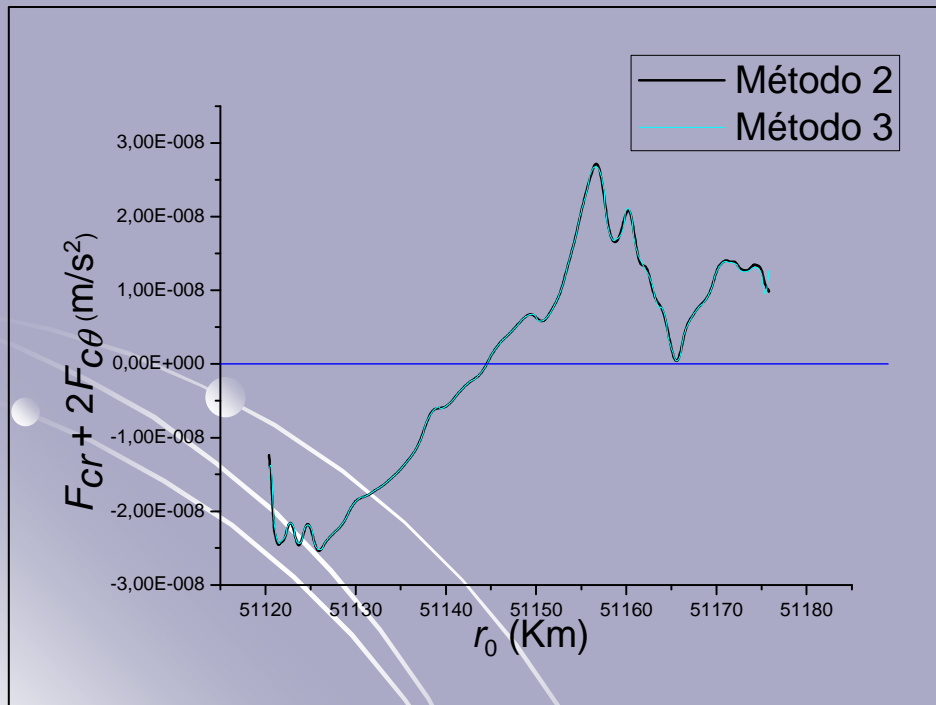
Tratamiento analítico de los datos

Fuerzas de contacto



Tratamiento analítico de los datos

Fuerzas de contacto



Interpretación de las fuerzas de contacto en los bordes

Hacia el interior en el extremo inferior

Hacia el exterior en el extremo superior

Conclusiones

- Se ha desarrollado un modelo teórico construido desde primeros principios para estudiar la dinámica de anillos planetarios angostos.
- Se encontró una condición para que el anillo tenga una frecuencia de precesión uniforme, tal como lo que se como se observa en el caso del anillo ϵ de Urano.
- Se encontró una expresión el término de autogravedad en función de las características del anillo.
- Se desarrollaron tres métodos para realizar el cálculo de la integral de autogravedad. Debe notarse que los tres métodos tienen bases teóricas y algoritmos de cálculo totalmente distintos.
- Uno de estos métodos presentó inconvenientes propios de su algoritmo.
- Los dos métodos restantes dieron resultados notablemente similares, a pesar de tener algoritmos de cálculo completamente diferentes.
- Con este resultado y la condición de precesión uniforme pudo obtenerse además los valores de las fuerzas de contacto.

Preguntas



Tratamiento analítico de los datos

El término de autogravedad

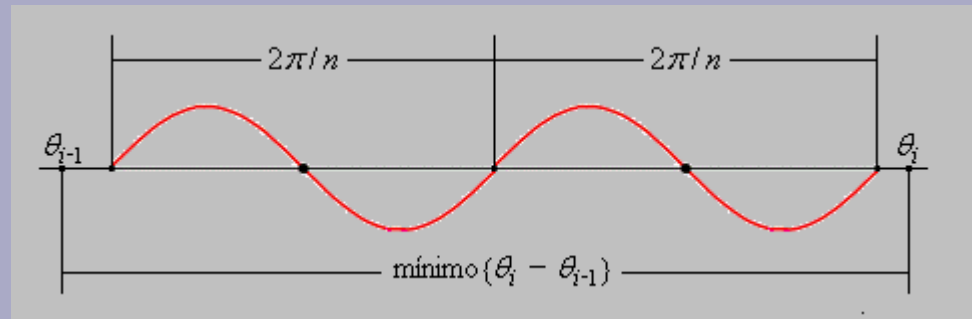
Segundo método: Serie de Fourier

Truncamiento de la suma

$$g_D(r_0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n I_n(r_0)$$

Considerando

$$H(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta)$$



Se toma

$$\frac{2\pi}{n_{MAX}} < \min_{1 \leq i \leq k} \left\{ \frac{(\theta_i - \theta_{i-1})}{2} \right\}$$

↓

$$n_{MAX} > \frac{4\pi}{\min_{1 \leq i \leq k} \{(\theta_i - \theta_{i-1})\}}$$

Se obtiene

$$\frac{4\pi}{\min_{1 \leq i \leq k} \{(\theta_i - \theta_{i-1})\}} = 406$$

Se elige

$$n_{MAX} = 500$$

Desarrollo teórico

Solución propuesta de la ecuación de movimiento

Definiciones

$$\kappa^2 = \frac{2\Omega}{r_0} \frac{d}{dr_0} (r_0^2 \Omega)$$

$$Q_\theta = \dot{\xi}_\theta + 2\Omega \xi_r$$

Ecuación de movimiento

$$\ddot{\xi}_r + \xi_r \kappa^2 = f_r - \Delta \left(\frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) + 2\Omega Q_\theta$$

Solución propuesta

$$\xi_r = A(r_0) \cos(\varphi_0)$$

$$\varphi_0 = \theta_0 - \Omega_p t$$

$$\theta_0 = \Omega(r_0)t + \beta$$