

# Modelando los Efectos Relativistas en el Sistema Solar

Julia Venturini y Tabaré Gallardo

Depto. de Astronomía, Facultad de Ciencias, UdelaR, Uruguay  
V Taller de Ciencias Planetarias

La Plata,  
24 de Febrero de 2010

- 1 Corrección Relativista
- 2 Cómputo analítico de los efectos relativistas: Ecuaciones de Gauss
- 3 Efectos relativistas en elementos orbitales
- 4 Modelos que simulan los efectos relativistas seculares
  - Modelos propuestos
  - Nuestro Modelo
  - Comparando Modelos
- 5 Consejos útiles

- 1 Corrección Relativista
- 2 Cómputo analítico de los efectos relativistas: Ecuaciones de Gauss
- 3 Efectos relativistas en elementos orbitales
- 4 Modelos que simulan los efectos relativistas seculares
  - Modelos propuestos
  - Nuestro Modelo
  - Comparando Modelos
- 5 Consejos útiles

# Obtención de la corrección relativista

- Expansión de las ecuaciones de la RG en términos de  $\mathbf{v}/c$ : aproximación Post Newtoniana
- Efectos debido únicamente a la estrella central:

$$\Delta\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{r^3 c^2} \left[ \left( \frac{4\mu}{r} - \mathbf{v}^2 \right) \mathbf{r} + 4(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} \right]$$

(Anderson et al., 1975)

- 1 Corrección Relativista
- 2 **Cómputo analítico de los efectos relativistas: Ecuaciones de Gauss**
- 3 Efectos relativistas en elementos orbitales
- 4 Modelos que simulan los efectos relativistas seculares
  - Modelos propuestos
  - Nuestro Modelo
  - Comparando Modelos
- 5 Consejos útiles

# Ecuaciones Medias de Gauss

Componentes radial ( $R$ ), transversa ( $T$ ) y normal ( $N$ ) de la fuerza perturbadora en las ecuaciones de Gauss + integración en un período orbital (cambio de variable:  $dt = \frac{r^2}{h} df$ )

$$\langle \dot{a} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu a}(1 - e^2)\pi} \int_0^{2\pi} \left[ eR \sin f + T(1 + e \cos f) \right] r^2 df$$

$$\langle \dot{e} \rangle = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu a^3}} \int_0^{2\pi} \left[ R \sin f + T \left( \cos f + \frac{1}{e} \left( 1 - \frac{r}{a} \right) \right) \right] r^2 df$$

$$\langle \dot{i} \rangle = \frac{1}{2\pi(1 - e^2)\sqrt{\mu a^5}} \int_0^{2\pi} N \cos(f + \omega) r^3 df$$

# Ecuaciones Medias de Gauss

$$\langle \dot{\Omega} \rangle = \frac{1}{2\pi(1-e^2)\sqrt{\mu a^5} \sin i} \int_0^{2\pi} N \sin(f + \omega) r^3 df$$

$$\langle \dot{\omega} \rangle = \frac{1}{2\pi e \sqrt{\mu a^3}} \int_0^{2\pi} \left[ -R \cos f + T \sin f \left( \frac{2 + e \cos f}{1 + e \cos f} \right) \right] r^2 - \cos i \langle \dot{\Omega} \rangle$$

$$\langle \dot{M} \rangle = \frac{-1}{\pi \sqrt{\mu a^5} (1 - e^2)} \int_0^{2\pi} R r^3 df - \sqrt{1 - e^2} (\langle \dot{\omega} \rangle + \langle \dot{\Omega} \rangle \cos i)$$

- 1 Corrección Relativista
- 2 Cómputo analítico de los efectos relativistas: Ecuaciones de Gauss
- 3 Efectos relativistas en elementos orbitales
- 4 Modelos que simulan los efectos relativistas seculares
  - Modelos propuestos
  - Nuestro Modelo
  - Comparando Modelos
- 5 Consejos útiles



# Componente radial y transversa de la corrección relativista

$$R = \frac{\mu^2}{r^3 c^2} \left[ 2 + \frac{r}{a} \left( 1 + \frac{4e^2}{1 - e^2} \sin^2 f \right) \right]$$

$$T = \frac{4\mu^2 e \sin f}{c^2 r^3}$$

$$N = 0$$

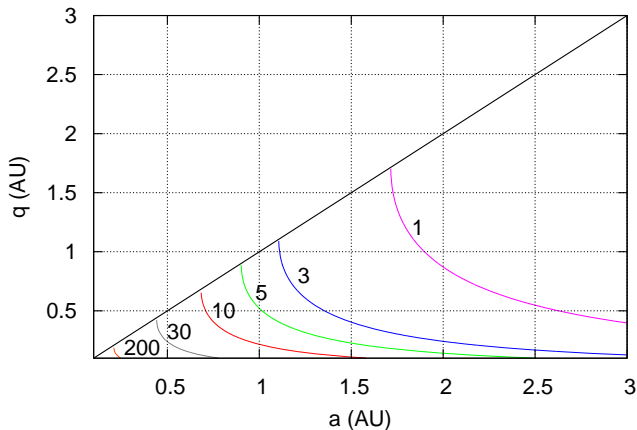
# Efectos relativistas en elementos orbitales

$$\langle \dot{a} \rangle = \langle \dot{e} \rangle = \langle \dot{i} \rangle = \langle \dot{\Omega} \rangle = 0$$

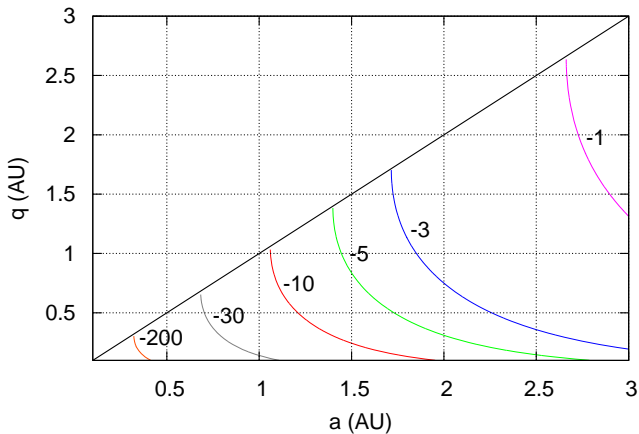
$$\langle \dot{\omega} \rangle = \frac{3}{c^2(1-e^2)} \sqrt{\frac{\mu^3}{a^5}}$$

$$\langle \dot{M} \rangle = \frac{3}{c^2} \sqrt{\frac{\mu^3}{a^5}} \left( 2 - \frac{5}{\sqrt{1-e^2}} \right)$$

# Efecto secular en argumento del perihelio ( $''$ / *siglo*)



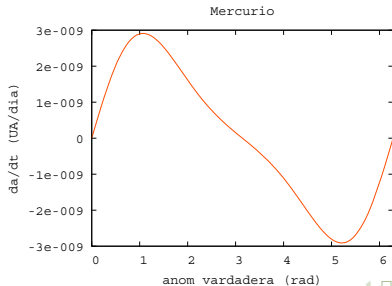
# Efecto secular en anomalía media ( $''$ / siglo)



# Cómputo numérico de la variación de la anomalía media

Perturbación relativista  $\longrightarrow$  genera pequeñas variaciones en semieje  $\implies$  una partícula integrada con la corrección relativista tiene un  $\langle a \rangle \neq a_0$

Para comparar  $M_{rel}$  con  $M_{clas}$ , hay que comparar la integración relativista con una clásica donde la partícula tenga  $a = \langle a \rangle$



- 1 Corrección Relativista
- 2 Cómputo analítico de los efectos relativistas: Ecuaciones de Gauss
- 3 Efectos relativistas en elementos orbitales
- 4 Modelos que simulan los efectos relativistas seculares
  - Modelos propuestos
  - Nuestro Modelo
  - Comparando Modelos
- 5 Consejos útiles

# Modelos propuestos

## Nobili y Roxburgh (1986):

$$R = -\frac{6\mu^2}{c^2 r^3} \quad (1)$$

Se recupera la variación en el argumento del perihelio pero no en la anomalía media.

## Saha y Tremaine (1992):

$$R = -\frac{6\mu^2}{c^2 r^3} + \frac{3\mu^2}{ac^2} \left( \frac{4}{\sqrt{1-e^2}} - 1 \right) \frac{1}{r^2} \quad (2)$$

Se obtienen las mismas variaciones seculares tanto en  $\omega$  como en  $M$ .

Pero... esta mejora aparente del modelo no es del todo real:

$$\dot{a}_{st} \neq \dot{a}_{rel}$$



$$\langle a \rangle_{st} \neq \langle a \rangle_{rel}$$



el modelo ST no reproducirá la evolución de un objeto con semieje inicial igual al medio relativista



la anomalía media calculada con este modelo diferirá de la que se obtiene con la corrección relativista.

**El modelo calcula la variación secular adecuada de  $M$  solo si las condiciones iniciales son obtenidas ajustando las observaciones a este modelo.**



# Pequerturbación Radial Constante

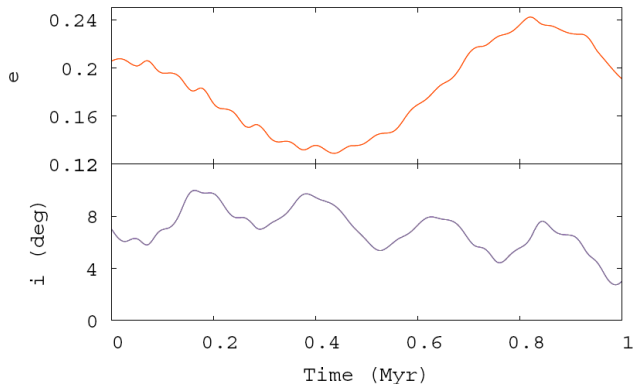
$$R = \frac{3\mu^2}{c^2 a^3 \sqrt{(1 - e^2)^3}}$$

Se obtiene la misma evolución secular en todos los elementos orbitales menos en  $M$

## Ventaja:

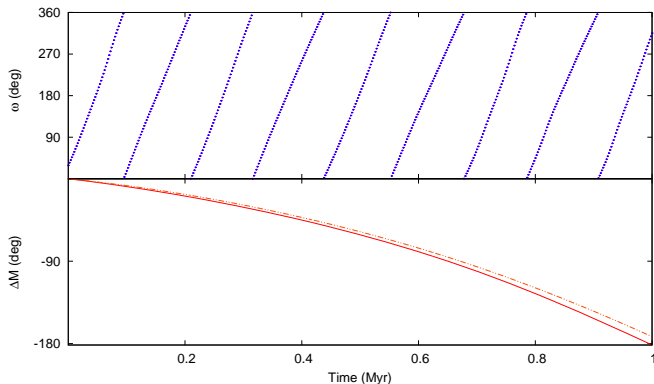
**impulso extra repartido equitativamente a lo largo de toda la órbita  $\Rightarrow$  puede introducirse en integradores de paso constante, sin necesidad de usar un paso de integración pequeño**

# Excentricidad e Inclinación (Mercurio)



Diferencias entre los distintos modelos:  $\Delta a \approx 10^{-6} UA$ ,  
 $\Delta e \approx 10^{-5}$ ,  $\Delta \omega \approx 10^{-4}$  grados, y de orden menor para  $i$  y  $\Omega$ .

# Argumento del perihelio y Anomalía Media (Mercurio)



A pesar de las diferencias notorias en  $M$ , la evolución orbital dada por los diferentes modelos es prácticamente indistinguible!





- 1 Corrección Relativista
- 2 Cómputo analítico de los efectos relativistas: Ecuaciones de Gauss
- 3 Efectos relativistas en elementos orbitales
- 4 Modelos que simulan los efectos relativistas seculares
  - Modelos propuestos
  - Nuestro Modelo
  - Comparando Modelos
- 5 Consejos útiles

## Consejos útiles

- Si su propósito es calcular efemérides:
  - No pretenda hacerlo con ninguno de los modelos mencionados
  - Utilice la corrección relativista original, o incluso el algoritmo relativista de N- cuerpos completo
- Si a ud. no le interesa conocer la posición exacta de una partícula en un instante dado, y quiere tener en cuenta los efectos relativistas más notorios, puede utilizar cualquiera de los modelos mencionados.
- En particular, si ud. está lidiando con simulaciones masivas, el modelo de perturbación radial constante puede serle de utilidad para no enlentecer brutalmente las integraciones.

Fin

¡Gracias!

-  Anderson, J.D., Esposito, P.B., Martin, W. & Muhlemsn, D.O., 1975, *Astrophys. J.*, 200, 221
-  Benitez, F. & Gallardo, T., 2008, *Celest. Mech. and Dyn. Ast.*, 101, 289
-  Nobili, A. & Roxburgh, I., 1986, Simulation of Relativistic Corrections in Long Term Numerical Integrators of Planetary Orbits. In *Relativity in Celestial Mechanics and Astronomy*”, ed. by J. Kovalevsky and V.A. Brumberg, 105
-  Saha, P. & Tremaine, S., 1992, *Astron. J.* 104, 1633