Modelando los Efectos Relativistas en el Sistema Solar

Julia Venturini y Tabaré Gallardo

Depto. de Astronomía, Facultad de Ciencias, UdelaR, Uruguay

V Taller de Ciencias Planetarias

La Plata,
24 de Febrero de 2010

Obtención de la corrección relativista

- Expansión de las ecuaciones de la RG en términos de $\mathbf{v}/c$: aproximación Post Newtoniana
- Efectos debido únicamente a la estrella central:

$$\Delta\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{r^3c^2}\left[\left(\frac{4\mu}{r} - \mathbf{v}^2\right)\mathbf{r} + 4(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})\mathbf{v}\right]$$

(Anderson et al., 1975)

Ecuaciones Medias de Gauss

Componentes radial (R), transversa (T)y normal (N) de la fuerza perturbadora en las ecuaciones de Gauss + integración en un período orbital (cambio de variable: $dt = \frac{r^2}{h} df$)

$$< \dot{a} > = \frac{1}{\sqrt{\mu a}(1-e^2)\pi} \int_0^{2\pi} \left[eR \sin f + T(1 + e \cos f) \right] r^2 df$$

$$< \dot{e} > = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu a^3}} \int_0^{2\pi} \left[R \sin f + T \left(\cos f + \frac{1}{e} \left(1 - \frac{r}{a} \right) \right) \right] r^2 df$$

$$< \dot{i} > = \frac{1}{2\pi(1-e^2)\sqrt{\mu a^5}} \int_0^{2\pi} N \cos(f + \omega) r^3 df$$

Ecuaciones Medias de Gauss

$$< \dot{\Omega} > = \frac{1}{2\pi(1-e^2)\sqrt{\mu a^5}\sin i} \int_0^{2\pi} N \sin(f+\omega) r^3 df$$

$$< \dot{\omega} > = \frac{1}{2\pi e\sqrt{\mu a^3}} \int_0^{2\pi} \left[-R\cos f + T\sin f \left(\frac{2+e\cos f}{1+e\cos f} \right) \right] r^2$$
$$- \cos i < \dot{\Omega} >$$

$$< \dot{M} > = \frac{-1}{\pi\sqrt{\mu a^5(1-e^2)}} \int_0^{2\pi} R r^3 df - \sqrt{1-e^2}(< \dot{\omega} > + < \dot{\Omega} > \cos i)$$

Componente radial y transversa de la corrección relativista

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{\mu^2}{r^3 c^2}\left[2 + \frac{r}{a}\left(1 + \frac{4e^2}{1-e^2}\sin^2 f\right)\right] \\
T &= \frac{4\mu^2 e}{c^2}\frac{\sin f}{r^3} \\
N &= 0
\end{aligned}
$$

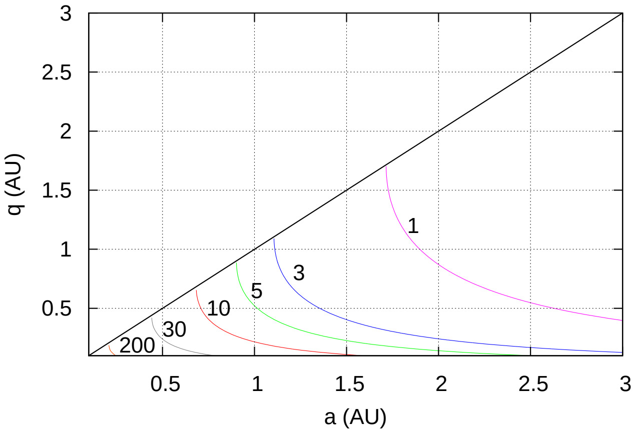
Efectos relativistas en elementos orbitales

$$< \dot{a} >=< \dot{e} >=< \dot{i} >=< \dot{\Omega} >= 0$$

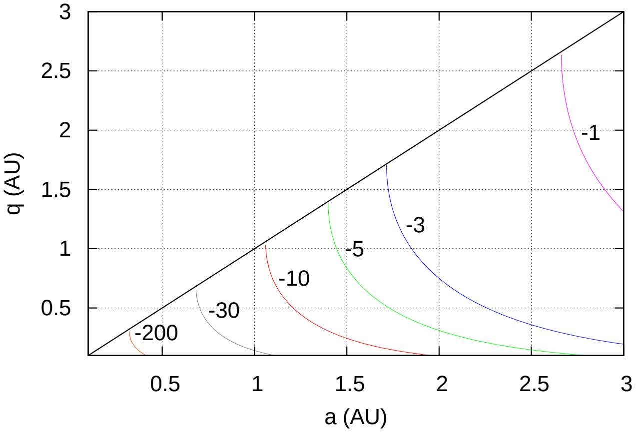
$$< \dot{\omega} >= \frac{3}{c^2(1-e^2)}\sqrt{\frac{\mu^3}{a^5}}$$

$$< \dot{M} >= \frac{3}{c^2}\sqrt{\frac{\mu^3}{a^5}}\left(2 - \frac{5}{\sqrt{1-e^2}}\right)$$

Efecto secular en argumento del perihelio ('' /*siglo*)



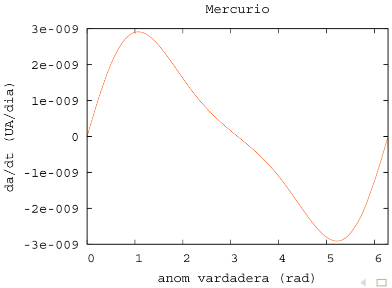
Efecto secular en anomalía media (" /*siglo*)



Cómputo numérico de la variación de la anomalía media

Perturbación relativista $\longrightarrow$ genera pequeñas variaciones en semieje $\Longrightarrow$ una partícula integrada con la corrección relativista tiene un $\langle a \rangle \neq a_0$

Para comparar M_{rel} con M_{clas}, hay que comparar la integración relativista con una clásica donde la partícula tenga $a = \langle a \rangle$



Modelos propuestos

Nobili y Roxburgh (1986):

$$R = -\frac{6\mu^2}{c^2 r^3} \tag{1}$$

Se recupera la variación en el argumento del perihelio pero no en la anomalía media.

Saha y Tremaine (1992):

$$R = -\frac{6\mu^2}{c^2 r^3} + \frac{3\mu^2}{ac^2}\left(\frac{4}{\sqrt{1-e^2}} - 1\right)\frac{1}{r^2} \tag{2}$$

Se obtienen las mismas variaciones seculares tanto en ω como en M.

Pero... esta mejora aparente del modelo no es del todo real:

$$\dot{a}_{st} \neq \dot{a}_{rel}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle a \rangle_{st} \neq \langle a \rangle_{rel}$$

$$\Downarrow$$

el modelo ST no reproducirá la evolución de un objeto con semieje inicial igual al medio relativista

$$\Downarrow$$

la anomalía media calculada con este modelo diferirá de la que se obtiene con la corrección relativista.

El modelo calcula la variación secular adecuada de M solo si las condiciones iniciales son obtenidas ajustando las observaciones a este modelo.

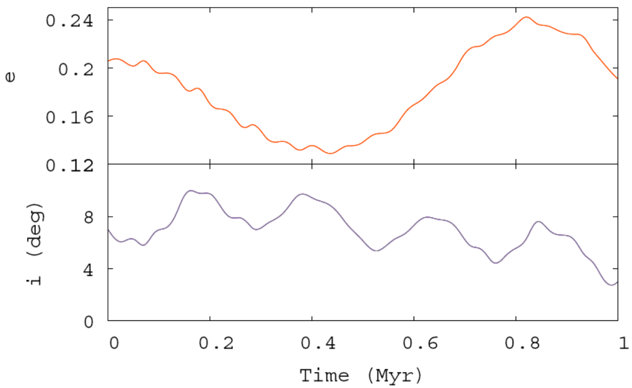
Pequerturbación Radial Constante

$$R = \frac{3\mu^2}{c^2 a^3 \sqrt{(1-e^2)^3}}$$

Se obtiene la misma evolución secular en todos los elementos orbitales menos en M

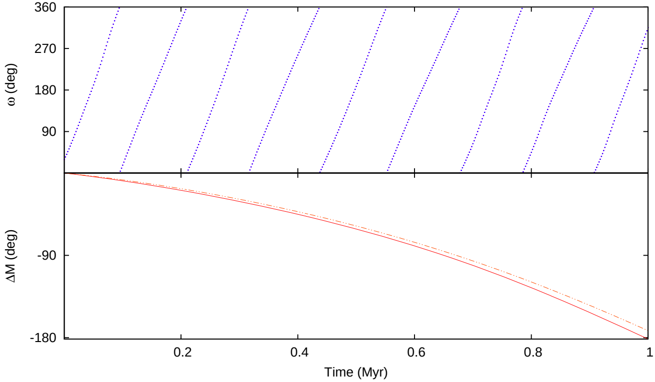
Ventaja:
impulso extra repartido equitativamente a lo largo de toda la órbita $\Rightarrow$ puede introducirse en integradores de paso constante, sin necesidad de usar un paso de integración pequeño

Excentricidad e Inclinación (Mercurio)



Difernecias entre los distintos modelos: $\Delta a \approx 10^{-6} UA$, $\Delta e \approx 10^{-5}$, $\Delta\omega \approx 10^{-4}$ grados, y de orden menor para i y Ω.

Argumento del perihelio y Anomalía Media (Mercurio)



A pesar de las diferencias notorias en M, la evolución orbital dada por los diferentes modelos es prácticamente indistinguible!

Consejos útiles

- Si su propósito es calcular efemérides:
  - No pretenda hacerlo con ninguno de los modelos mencionados
  - Utilice la corrección relativista original, o incluso el algoritmo relativista de N- cuerpos completo

- Si a ud. no le interesa conocer la posición exacta de una partícula en un instante dado, y quiere tener en cuenta los efectos relativistas más notorios, puede utilizar cualquiera de los modelos mencionados.

- En particular, si ud. está lidiando con simulaciones masivas, el modelo de perturbación radial constante puede serle de utilidad para no enlentecer brutalmente las integraciones.

Fin

¡Gracias!

- Anderson, J.D., Esposito, P.B., Martin, W. & Muhlemsn, D.O., 1975, Astrophys. J, 200, 221
- Benitez, F. & Gallardo, T., 2008, Celest. Mech. and Dyn. Ast. , 101, 289
- Nobili, A. & Roxburgh, I., 1986, Simulation of Relativistic Corrections in Long Term Numerical Integrators of Planetary Orbits. In Relativity in Celestial Mechanics and Astronomy", ed. by J. Kovalevsky and V.A. Brumberg, 105
- Saha, P. & Tremaine, S., 1992, Astron. J. 104, 1633