

Métodos para calcular formación y evolución planetaria

Omar G. Benvenuto¹

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Universidad Nacional de La Plata

Paseo del Bosque S/N, 1900 La Plata, Argentina

Instituto de Astrofísica de La Plata (IALP), CCT-CONICET,
Argentina

Basado en los trabajos

- Benvenuto, O. G., Fortier, A., Brunini, A. 2009. Forming Jupiter, Saturn, Uranus and Neptune in few million years by core accretion. *Icarus* 204, 752-755.
- Fortier, A., Benvenuto, O. G., Brunini, A. 2009. Oligarchic planetesimal accretion and giant planet formation II. *Astronomy and Astrophysics* 500, 1249-1252.
- Benvenuto, O. G., Brunini, A., Fortier, A. 2007. Envelope instability in giant planet formation. *Icarus* 191, 394-396.
- Fortier, A., Benvenuto, O. G., Brunini, A. 2007. Oligarchic planetesimal accretion and giant planet formation. *Astronomy and Astrophysics* 473, 311-322.
- Benvenuto, O. G., Brunini, A. 2005. Methods for computing giant planet formation and evolution. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 356, 1383-1395.

¹Email: obenvenu@fcaglp.unlp.edu.ar

Estructura de los Planetas Gigantes del Sistema Solar

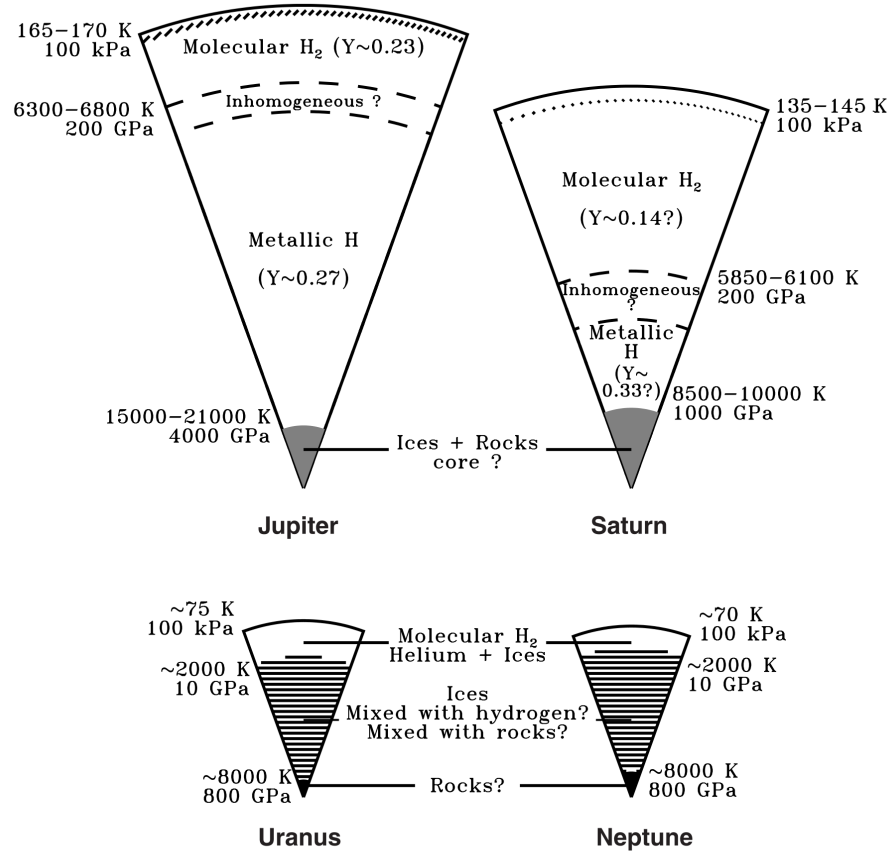


Figure 1: Representación esquemática de la estructura interna de los cuatro gigantes del Sistema Solar (Guillot 2005).

$$\phi(r, \theta) = -\frac{GM_p}{r} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} J_i \left(\frac{R_{ec}}{r} \right)^i P_i(\cos \theta) \right) \quad (1)$$

r : coordenada radial; θ : ángulo polar; M_p : masa del planeta; R_{ec} : radio ecuatorial; J_i : momentos multipolares gravitatorios,

Descripción de la formación planetaria

- Desprecio campos magnéticos
- Desprecio rotación
- No hay una dirección privilegiada en el espacio

→ Asumo simetría esférica

El núcleo planetario

Núcleo inerte de masa M_{core} con densidad constante ρ_{core} . El núcleo crece a una tasa \dot{M}_{core} .

- Desprecio intercambio de calor núcleo - envoltura
- Desprecio procesos de compresión del núcleo

La envoltura gaseosa planetaria

- Ecuación de conservación de la masa

$$\frac{\partial r}{\partial M_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (2)$$

- Ecuación de equilibrio hidrostático

$$\frac{\partial P}{\partial M_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \quad (3)$$

- Ecuación de balance energético

$$\frac{\partial L}{\partial M_r} = \epsilon_{ac} - T \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4)$$

- Ecuación de transporte

$$\frac{\partial T}{\partial M_r} = -\frac{GM_r T}{4\pi r^4 P} \nabla \quad (5)$$

- r : Coordenada radial

- M_r : Masa contenida en una esfera de radio r
- ρ : Densidad
- P : Presión
- G : Constante de gravitación universal,
- L : Luminosidad
- ϵ_{ac} : Liberación de energía debida a la acreción de planetesimales,
- T : Temperatura,
- S : Entropía por unidad de masa
- $\nabla = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}$: Gradiente de temperatura

El gradiente radiativo ∇_{rad} de temperatura es

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa LP}{M_r T^4} \quad (6)$$

- κ : Opacidad media de Rosseland
- a : Constante de radiación
- c : Velocidad de la luz

Empleamos el Criterio de estabilidad de Schwarzschild: Si $\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}}$ se considera que la convección es adiabática: $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$, caso contrario $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$

Condiciones de borde internas

En el fondo de la envoltura gaseosa $M_r = M_{\text{core}}$

$$r = R_{\text{core}} \quad (7)$$

$$L = L_{\text{acc-core}} \quad (8)$$

Condiciones de borde externas

Asumo que la presión y la temperatura del borde externo del planeta se corresponde con las condiciones de la nebulosa protoplanetaria.

$$T = T_{nebular} \quad (9)$$

$$P = P_{nebular} \quad (10)$$

El borde del planeta R_{pl} lo considero ubicado en el mínimo entre el Radio de Acreción R_{acc} y el Radio de Hill R_H

$$R_H = a \left(\frac{M}{3M_\star} \right)^{1/3} . \quad (11)$$

$$R_{acc} = \frac{GM}{c_s^2} \quad (12)$$

$$R_{pl} = \min(R_{acc}, R_H) \quad (13)$$

- c_s^2 : Velocidad del sonido
- a : Radio de la órbita (circular)
- M_\star : Masa de la estrella central del sistema

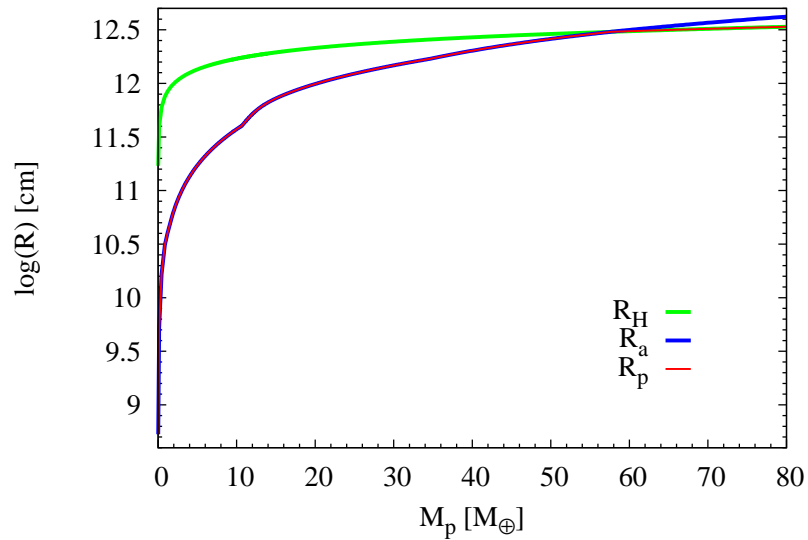


Figure 2: El radio del planeta en función de su masa total para el caso de la formación de Júpiter.

Sobre la física constitutiva de los planetas

- Mezcla de Hidrógeno, Helio y elementos pesados
- Temperaturas muy bajas: Física **no ideal**
- H molecular, neutro e ionizado, He neutro
- Opacidades moleculares y de granos
- La composición de los granos de polvo depende de la historia del objeto. No esta en equilibrio termodinámico "LTE"
- **Es un problema extremadamente complejo**

Desde el punto de vista numérico es difícil incorporar esta física en un código numérico. Es necesario interpolar en tablas de una forma lo mas suave posible. De lo contrario, el esquema (a ser definido luego) implícito iterativo no converge.

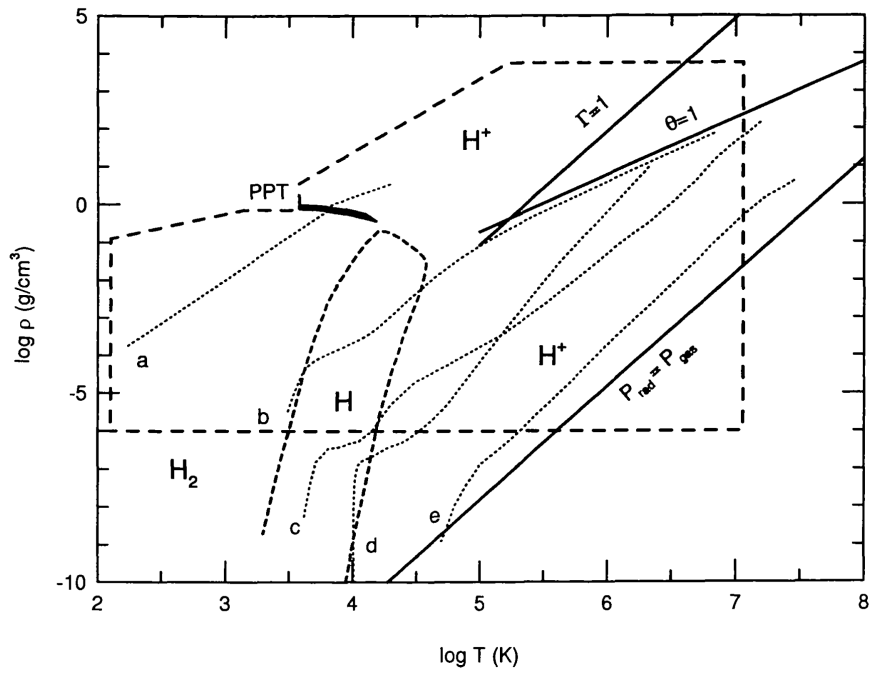


Figure 3: Diagrama de fases para el Hidrógeno (Saumon, Chabrier & Van Horn 1995).

Sobre el proceso de acreción de sólidos

La tasa de acreción de masa por parte del núcleo planetario estará dada por

$$\frac{dM_c}{dt} \simeq F \frac{\Sigma}{2h} \pi R_{\text{eff}}^2 v_{\text{rel}}, \quad (14)$$

donde M_c es la masa del núcleo del planeta, h es la altura de escala del disco de planetesimales, R_{eff} es el radio efectivo de captura del embrión y $F \approx 3$.

Si no hubiera envoltura gaseosa, debido al enfocamiento gravitatorio, el radio efectivo de captura del protoplaneta, R_{eff} , es mayor que el radio geométrico del embrión sólido, R_c ,

$$R_{\text{eff}}^2 = R_c^2 \left(1 + \left(\frac{v_{\text{esc}}}{v_{\text{rel}}} \right)^2 \right), \quad (15)$$

con v_{esc} la velocidad de escape de su superficie y v_{rel} la velocidad relativa entre el protoplaneta y los planetesimales,



Figure 4: Enfoque gravitatorio de un planetesimal.

Los planetesimales tienen una velocidad media debida a la excitación planetaria y la disipación por viscosidad gaseosa. El planeta ofrece una sección eficaz de captura. Esta va a depender de

- velocidad de los planetesimales
- tamaño de los planetesimales
- perfil de densidad de la envoltura planetaria

En el regimen de viscosidad correspondiente, la fuerza viscosa es de la forma

$$\vec{f}_D = -\frac{1}{2} C_D \pi r_m^2 \rho v^2 \hat{v}, \quad (16)$$

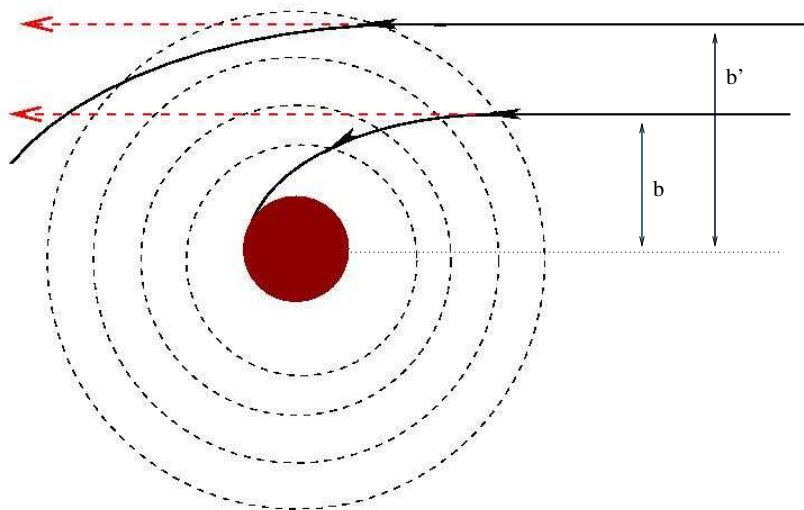


Figure 5: Determinando el radio efectivo de captura de planetesimales.

donde aquí ρ es la densidad de la envoltura y $C_D = 1$. Luego, la ecuación de movimiento surge de combinar ambas ecuaciones,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}_G + \vec{f}_D = -\frac{GM_r m}{r^2} \hat{r} - \frac{1}{2} C_D \pi r_m^2 \rho v^2 \hat{v}. \quad (17)$$

Originalmente la órbita del planetesimal es hiperbólica. Para que el planeta atrape a esta partícula puede ocurrir que **impacte el núcleo planetario** o que se ligue por efecto de la disipación viscosa al entrar a la envoltura. En nuestros modelos hemos despreciado la ablación, sin embargo este efecto puede ser importante.

Hemos asumido en todos nuestros trabajos que el material capturado cae hacia el interior profundo depositandose en el núcleo planetario.

Llevando las ecuaciones diferenciales a ecuaciones en diferencias

Defino una coordenada independiente cuasi-Lagrangiana ξ . Las ecuaciones se resuelven en función de ξ y t

$$\xi \equiv \ln \left(\frac{M_r}{M_c} - 1 \right) = \ln \left(\frac{M_g}{M_c} \right), \quad (18)$$

En la ecuación de conservación de la energía debo tener en cuenta que la derivada temporal es manteniendo constante en elemento de gas. Por lo tanto

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{M_g} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\xi} + \left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{M_g} \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \right|_t,$$

donde de la ecuación 18 se obtiene que:

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{M_g} = -\frac{\dot{M}_c}{M_c} = -\frac{\partial}{\partial t} \ln M_c.$$

Es conveniente transformar las cantidades definidas positivas a variables logarítmicas

$$\begin{aligned} x &\equiv \ln r \\ \theta &\equiv \ln T \\ p &\equiv \ln P \end{aligned}$$

Mientras que la luminosidad puede ser negativa (por ejemplo durante los pulsos de acreción que se luego citaremos). Por lo tanto mantenemos la variable lineal original.

Es importante calcular las diferencias de estas cantidades respecto de las correspondientes al modelo inmediato anterior. Esto disminuye enormemente los errores de truncamiento y permite el cálculo de etapas que de otra forma serían inaccesibles.

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \delta y = y(t) \left(1 + \frac{\delta y}{y(t)} \right) \quad (19)$$

$$\ln y(t + \Delta t) = \ln (y(t) + \delta y) = \ln y(t) + \ln \left(1 + \frac{\delta y}{y(t)} \right) \quad (20)$$

En el cálculo de la derivada temporal de la entropía tendremos expresiones del tipo

$$\frac{\partial \ln y}{\partial t} \approx \frac{\ln y(t + \Delta t) - \ln y(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \ln \left(1 + \frac{\delta y}{y(t)} \right) \quad (21)$$

De esta forma evito la resta de números muy parecidos !!!

Si tenemos una ecuación diferencial que incluye derivadas temporales de la forma (x es una variable espacial).

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = F(x, \Psi) \quad (22)$$

tenemos dos posibilidades:

Discretización explícita: Fácil de programar

$$\Psi(x, t + \Delta t) = \Psi(x, t) + \Delta t F(x, \Psi(x, t)) \quad (23)$$

Discretización implícita: Mas trabajosa para programar. Usualmente es necesario iterar para conseguir la solución.

$$\Psi(x, t + \Delta t) = \Psi(x, t) + \Delta t F(x, \Psi(x, t + \Delta t)) \quad (24)$$

Es de importancia capital escribir el sistema de ecuaciones de diferencias en forma totalmente implícita (backwards differences). Esto es conocido en astrofísica como el método de Henyey. Si utilizáramos métodos explícitos estaríamos limitados por el Criterio de estabilidad de Courant: El paso máximo de tiempo para tener una secuencia de modelos estable es el mínimo de los tiempos sónicos de todo un modelo

$$\Delta t \leq \min_j \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{c_s} \right). \quad (25)$$

→ Ese tiempo es muy corto: necesitaríamos millones de modelos para completar una simulación. Si usamos un paso de tiempo mayor, el esquema amplifica errores numéricos sin límite: el esquema es inestable.

Transformamos las ecuaciones diferenciales, por ejemplo para el caso de la ecuación de continuidad tenemos

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{4\pi} \frac{M_c}{\rho e^{3x} e^{-\xi}}.$$

Luego, esta ecuación escrita en diferencias, resulta en:

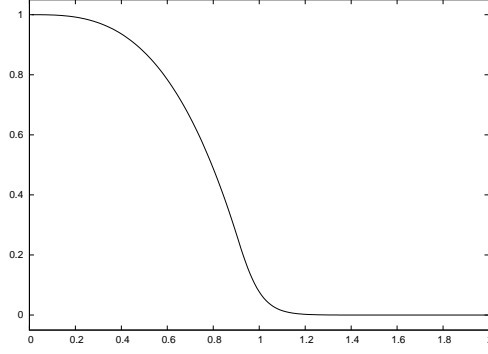


Figure 6: Factor que multiplica al potencial newtoniano standard.

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{\xi_{j+1} - \xi_j} = \frac{1}{4\pi \rho} \frac{M_c}{j + \frac{1}{2}} e^{-3x_{j+\frac{1}{2}}} e^{\xi_{j+\frac{1}{2}}} \quad 1 \leq j \leq m - 2$$

donde j representa un punto de la grilla y las magnitudes con subíndice $j + \frac{1}{2}$ son calculadas de la siguiente manera:

$$b_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(b_{j+1} + b_j),$$

En la ecuación de equilibrio hidrostático incluimos un factor de ablandamiento que corresponde al caso del problema restringido de los tres cuerpos, de la forma $1 - (r/R_H)^3$. Para $r \geq 0.9R_H$ usamos una función de tipo Fermi $A/(1 + \exp \frac{r-R_H}{B})$, pidiendo continuidad en la función y la derivada en $r = \alpha R_H$ ($\alpha < 1$). Esto nos permite extender el grillado mas allá del radio planetario: Conseguimos una descripción natural del intercambio de gas del planeta con la nebulosa circundante.

$$B_1(p_1, \theta_1, x_1, L_1) = 0 \quad (26)$$

$$B_2(p_1, \theta_1, x_1, L_1) = 0. \quad (27)$$

$$G_i^j(p_j, \theta_j, x_j, L_j, \xi_j; p_{j+1}, \theta_{j+1}, x_{j+1}, L_{j+1}, \xi_{j+1}) = 0 \quad (28)$$

$$i = 1, \dots, 4$$

$$j = 1, \dots, m - 2.$$

$$C_i(p_{m-1}, \theta_{m-1}, x_{m-1}, L_{m-1}; p_m, \theta_m) = 0 \quad (29)$$

$$i = 1, \dots, 4.$$

$$\left(\frac{\partial B_i}{\partial L_1}\right)^0 \delta L_1^0 + \left(\frac{\partial B_i}{\partial p_1}\right)^0 \delta p_1^0 + \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_1}\right)^0 \delta x_1^0 + \left(\frac{\partial B_i}{\partial \theta_1}\right)^0 \delta \theta_1^0 = -(B_i)^0 \quad (30)$$

$$i = 1, 2$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial G_i^j}{\partial L_j}\right)^0 \delta L_j^0 + \left(\frac{\partial G_i^j}{\partial p_j}\right)^0 \delta p_j^0 + \left(\frac{\partial G_i^j}{\partial x_j}\right)^0 \delta x_j^0 + \\ & + \left(\frac{\partial G_i^j}{\partial \theta_j}\right)^0 \delta \theta_j^0 + \left(\frac{\partial G_i^j}{\partial L_{j+1}}\right)^0 \delta L_{j+1}^0 + \left(\frac{\partial G_i^j}{\partial p_{j+1}}\right)^0 \delta p_{j+1}^0 + \\ & + \left(\frac{\partial G_i^j}{\partial x_{j+1}}\right)^0 \delta x_{j+1}^0 + \left(\frac{\partial G_i^j}{\partial \theta_{j+1}}\right)^0 \delta \theta_{j+1}^0 = -(G_i^j)^0 \quad (31) \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, 4 \text{ y } j = 1, \dots, m-2$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial C_i}{\partial L_{m-1}}\right)^0 \delta L_{m-1}^0 + \left(\frac{\partial C_i}{\partial p_{m-1}}\right)^0 \delta p_{m-1}^0 + \left(\frac{\partial C_i}{\partial x_{m-1}}\right)^0 \delta x_{m-1}^0 + \left(\frac{\partial C_i}{\partial \theta_{m-1}}\right)^0 \delta \theta_{m-1}^0 + \\ & + \left(\frac{\partial C_i}{\partial p_m}\right)^0 \delta p_m^0 + \left(\frac{\partial C_i}{\partial \theta_m}\right)^0 \delta \theta_m^0 = -(C_i)^0 \quad (32) \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, 4.$$

Podemos escribir este sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1}\right)^0 & \dots & & \\ \vdots & & & \\ & & \left(\frac{\partial C_4}{\partial \theta_m}\right)^0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1^0 \\ \vdots \\ \delta \theta_m^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_1 \\ \vdots \\ -C_4 \end{pmatrix} \quad (33)$$

La matriz de coeficientes tiene, esquemáticamente, la siguiente forma:

Resultados

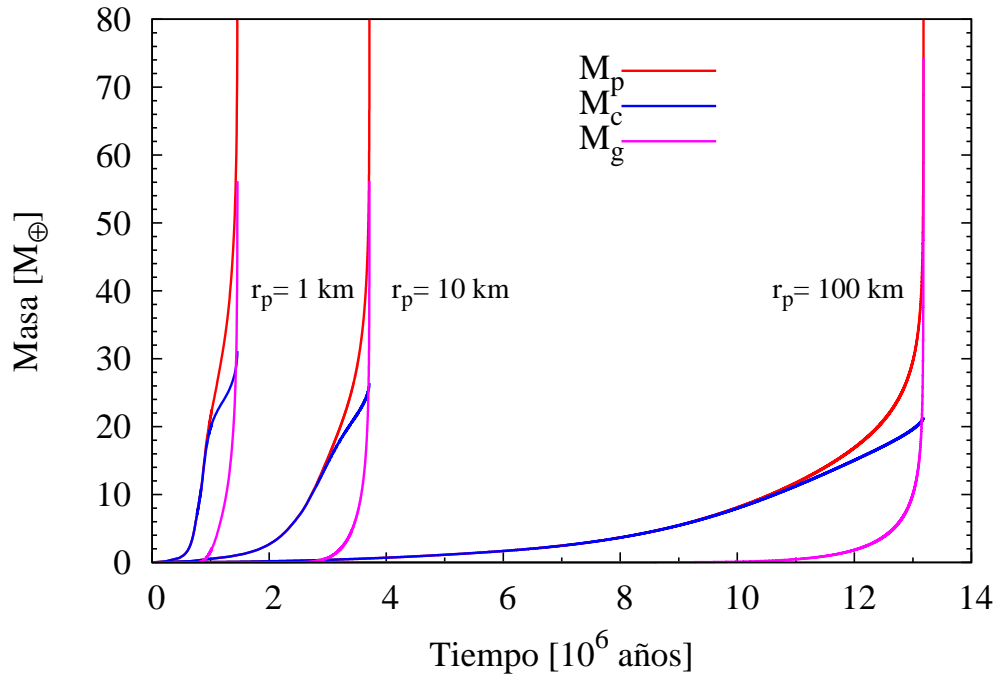


Figure 7: Crecimiento planetario considerando un único tamaño de planetesimales. Notese la dependencia de la escala de tiempo.

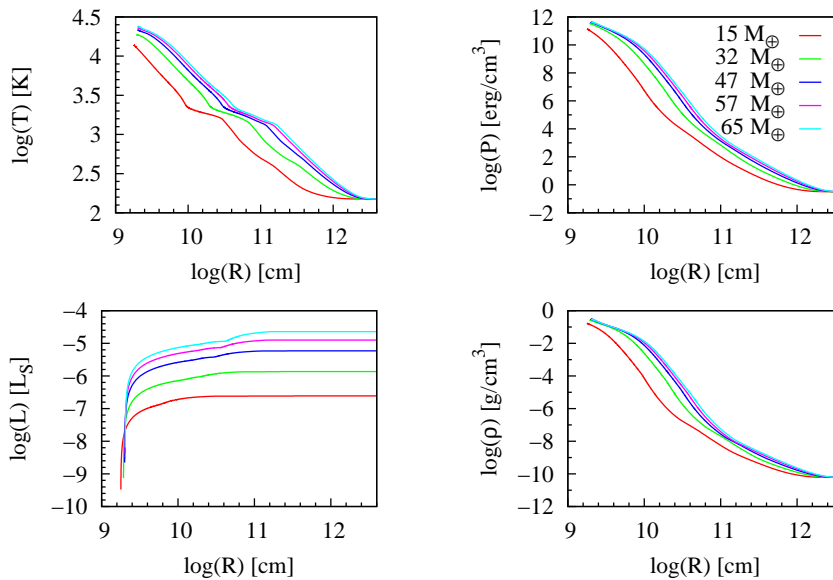


Figure 8: Perfiles de las principales cantidades físicas del interior planetario en función de la masa total.

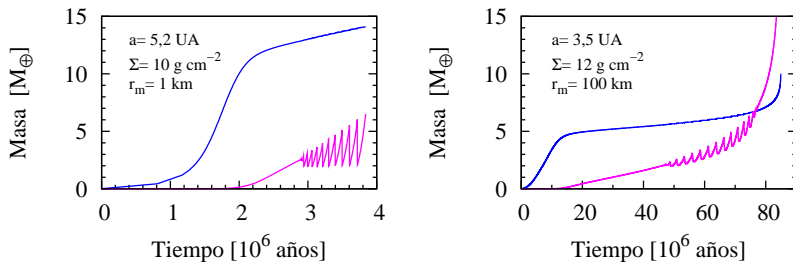


Figure 9: Inestabilidades pulsacionales asociadas a la formación de la envoltura planetaria.

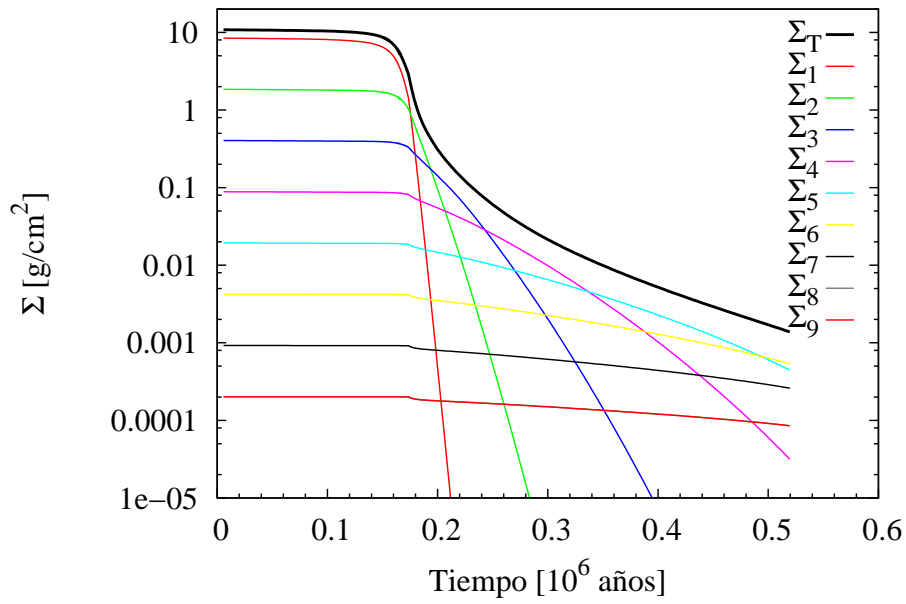


Figure 10: Densidad superficial de planetesimales de diferentes tamaños en función del tiempo para el caso de la formación de Júpiter.

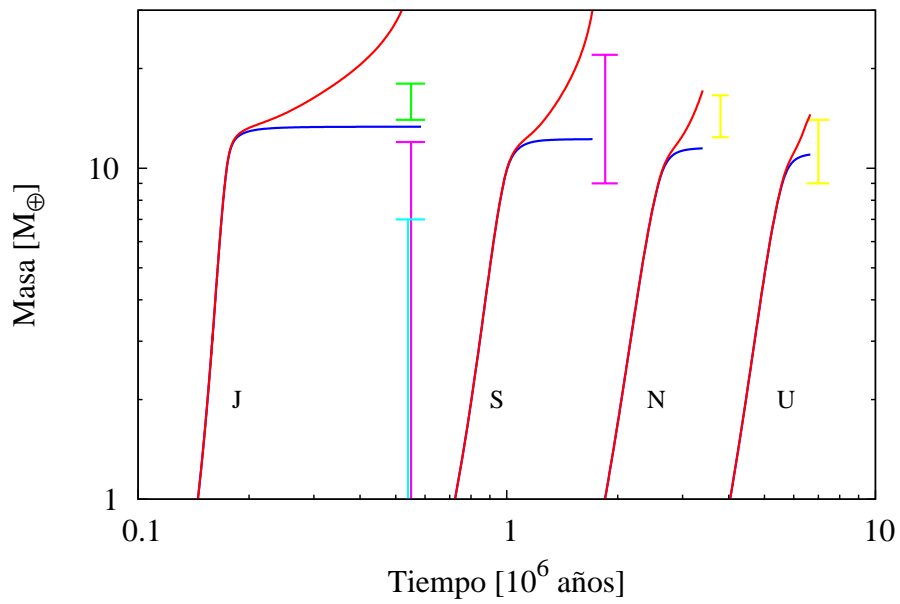


Figure 11: crecimiento de los cuatro gigantes del Sistema Solar.

Estos métodos no están exentos de dificultades en su aplicación. Algunos de los resultados presentados en estos trabajos han sido muy difíciles de calcular. La mayor parte de las dificultades han estado asociadas con la etapa de inestabilidad de la envoltura gaseosa planetaria.

Muchas gracias a Andrea Fortier por permitirme utilizar en esta presentación material contenido en su Tesis Doctoral !