

Unidad 5

Problemas de álgebra lineal numérica.

Eliminación gaussiana. Factorización LU. Sea

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, donde A es una matriz cuadrada de orden n no singular¹. El procedimiento de eliminación gaussiana con una estrategia de pivoteo que permita el intercambio de filas (típicamente, el pivoteo parcial, llamado también pivoteo máximo de columna) muestra que la matriz de coeficientes del sistema admite una factorización de la forma

$$A = PLU.$$

L es una *matriz triangular inferior* con elementos diagonales iguales a la unidad y cuyos otros elementos bajo la diagonal son los multiplicadores utilizados durante la eliminación. U es una *matriz triangular superior* cuyos elementos son los coeficientes del sistema final equivalente, siendo los elementos de la diagonal no nulos. Si los intercambios de fila durante el proceso de eliminación son registrados en un vector \mathbf{p} (cuyo valor inicial es $(1, 2, \dots, n)$), entonces la *matriz de permutación* P se obtiene a partir de la matriz identidad I de orden n permutando sucesivamente la columna i por la columna $j = \mathbf{p}(i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Por ejemplo, si para $n = 4$, $\mathbf{p} = (3, 4, 3, 4)$, entonces

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conocida la factorización LU , el sistema de ecuaciones lineales es equivalente a $PLU \mathbf{x} = \mathbf{b}$, el cual conduce a dos sistemas triangulares,

$$L \hat{\mathbf{b}} = P^{-1} \mathbf{b}, \quad U \mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}.$$

Así, para obtener el vector solución \mathbf{x} , se resuelve en primer lugar el primer sistema por *sustitución hacia adelante* para obtener $\hat{\mathbf{b}}$ y luego se resuelve el segundo sistema por *sustitución hacia atrás*.

¹Por lo tanto el sistema admite una solución y ésta es única.

El paquete de rutinas LAPACK proporciona un amplio conjunto de subrutinas para resolver sistemas lineales dependiendo de la naturaleza particular de la matriz de coeficientes. En particular, la subrutina DGESV permite resolver un sistema para una matriz A real general almacenada en un arreglo bidimensional de doble precisión.

Ejercicio 1. Implementar un programa FORTRAN que utilice la subrutina DGESV para resolver un sistema de ecuaciones lineales por eliminación gaussiana.

Ejercicio 2. Encontrar la factorización LU de las siguientes matrices,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Resolver los sistemas $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ con A dada por las matrices del punto anterior y \mathbf{b} por:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Métodos iterativos. Un método iterativo para resolver el sistema lineal $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ comienza con una aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ a la solución \mathbf{x} , y genera una sucesión de vectores $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ que se espera converja a \mathbf{x} . Los dos métodos iterativos más conocidos son el *método de Jacobi* y el *método de Gauss-Seidel* cuyas implementaciones algorítmicas se describen a continuación.

Método de Jacobi

Dada A de $n \times n$ con elementos diagonales no nulos.

Tomar un vector $\mathbf{x}^{(0)}$ de orden n , usualmente $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

Para $k = 0, 1, 2, \dots$

Tomar

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i}{a_{ii}},$$

para $i = 1, \dots, n$.

Método de Gauss–Seidel

Dada A de $n \times n$ con elementos diagonales no nulos.

Tomar un vector $\mathbf{x}^{(0)}$ de orden n , usualmente $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

Para $k = 0, 1, 2, \dots$

Tomar $x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i}{a_{ii}}$,
para $i = 1, \dots, n$.

Como en todo método iterativo, debe establecerse un criterio de paro para las iteraciones, el cual, en este contexto, puede ser

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|} < \epsilon,$$

para una norma matricial y cierta tolerancia ϵ prefijada.

Ejercicio 4. Escribir sendos programas FORTRAN para las implementaciones del método de Jacobi y el método de Gauss-Seidel.

Ejercicio 5. Utilizar los programas anteriores para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a)

$$\begin{aligned} 3.8x_1 + 1.6x_2 + 0.9x_3 &= 15.5 \\ -0.7x_1 + 5.4x_2 + 1.6x_3 &= 10.3 \\ 1.5x_1 + 1.1x_2 - 3.2x_3 &= 3.5 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -4 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 &= 2 \\ 0.5x_1 + x_2 + 0.5x_3 &= 2 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Los sistemas del ejercicio anterior muestran que los métodos iterativos no siempre son convergentes. La condición *necesaria y suficiente* para la convergencia es dada como sigue. Sea A la matriz cuadrada de orden n del sistema. Denotemos por D a la matriz diagonal de orden n formada con los elementos de la diagonal

principal de A y ceros en los demás elementos. Sea $-L$ la matriz triangular inferior de orden n formada con los elementos de A situados bajo la diagonal principal y ceros en los demás elementos. Sea $-U$ la matriz triangular superior de orden n formada con los elementos situados por arriba de la diagonal principal y ceros en los demás elementos. Entonces

$$A = D - L - U.$$

Sea

$$T = \begin{cases} D^{-1}(L + U) & \text{(método de Jacobi),} \\ (D - L)^{-1}U & \text{(método de Gauss-Seidel).} \end{cases}$$

Entonces el método iterativo respectivo converge para cualquier elección del vector inicial, si y solo si $\rho(T) < 1$, donde $\rho(T)$ denota el radio espectral de T . Además, la velocidad de convergencia del método depende de $\rho(T)$, cuanto menor sea este valor más rápida será la convergencia.

Ejercicio 6. Justificar la convergencia (o divergencia) de los métodos iterativos para los sistemas del ejercicio anterior.

Estimación del error. Número de condición. En la práctica, una solución *numérica* $\hat{\mathbf{x}}$ de un sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tendrá cierto error $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|$, el cual, por su puesto no puede ser calculado. Ahora bien, siempre podemos calcular el *vector residual* $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$. Puesto que $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ implica que $\hat{\mathbf{x}}$ es la solución exacta del sistema, resulta natural sugerir que si $\|\mathbf{r}\|$ es pequeña, entonces $\hat{\mathbf{x}}$ es una solución aproximada precisa. Sin embargo, esto no es siempre el caso. La exactitud de la solución calculada depende también del *número de condición* $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ de acuerdo a la siguiente desigualdad

$$\frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Esta desigualdad nos dice que el error relativo en una solución numérica puede ser tan grande como $\kappa(A)$ veces su residuo relativo. De este modo, solo si $\kappa(A) \simeq 1$ el error relativo y el residuo relativo son del mismo tamaño, y el residuo podrá ser utilizado con seguridad como una indicación de la exactitud de la solución numérica. En esta situación se dice que la matriz A del sistema es una *matriz bien condicionada*. Si, por el

contrario, $\kappa(A) \gg 1$, el intervalo en que se puede situar el error relativo es muy amplio y por lo tanto no se puede asegurar que la solución numérica es precisa, aún cuando el vector residual sea pequeño. En esta situación, se dice que la matriz A es una *matriz mal condicionada*.

Ejercicio 7. Mostrar que para toda matriz no singular, $\kappa(A) \geq 1$.

Ejercicio 8. Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ el sistema lineal dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0.89 & 0.53 \\ 0.47 & 0.28 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.19 \end{pmatrix}.$$

Dada la solución aproximada $\hat{\mathbf{x}} = (-11.5, 20)^t$, calcule el vector residual y estime el error relativo. Sabiendo que la solución exacta es $\mathbf{x} = (1, -1)^t$, calcule el error exacto. Compare los resultados.

Ejercicio 9. La matriz de Hilbert $H^{(n)}$ de orden n está definida por

$$H_{ij}^{(n)} = \frac{1}{i+j-1}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Su inversa $T^{(n)} = [H^{(n)}]^{-1}$ consta sólo de números enteros y puede ser calculada con el siguiente fragmento de código FORTRAN.

```
k = n
do i=1,n
  if (i.ne.1) then
    k = ((n-i+1)*k*(n+i-1))/(i-1)**2
  endif
  l = k*k
  t(i,i) = 1/(2*i-1)
  do j=i+1,n
    l = -((n-j+1)*l*(n+j-1))/((j-1)**2)
    t(j,i) = 1/(i+j-1)
    t(i,j) = t(j,i)
  end do
end do
```

Utilice dicho código para calcular el número de condición κ_∞ de las diez primeras matrices de Hilbert.

Ejercicio 10. Dado el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, suponga que el término \mathbf{b} se perturba por una cantidad $\delta\mathbf{b}$. Mostrar que el efecto de esta perturbación sobre la solución será $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$, con $\delta\mathbf{x}$ acotada por

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Si ahora es la matriz A la que es perturbada por una cantidad δA , mostrar que el efecto de tal perturbación sobre la solución será $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ con $\delta\mathbf{x}$ acotada por

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

Ejercicio 11. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 13 & -17 \\ 13 & 29 & -38 \\ -17 & -38 & 50 \end{pmatrix}$$

Si se desea resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} = (1.9358, -2.3412, 3.5718)^t$ tiene sus elementos redondeados a 5 dígitos, ¿qué puede decirse del error relativo en la solución?

Problema de autovalores. Sea A una matriz $n \times n$ sobre un cuerpo K , usualmente \mathbb{R} ó \mathbb{C} . Un escalar λ de K es un *autovalor* de A si existe un vector (columna) no nulo \mathbf{x} de K^n tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Todo vector no nulo que satisfaga esta ecuación se llama *autovector* de A asociado al autovalor λ . El conjunto de todos los vectores de K^n tales que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ se llama *espacio propio* asociado al autovalor λ . El conjunto de todos los autovalores *distintos* de A se llama el *espectro* de A .

De acuerdo al **teorema de Gerschgorin**, los autovalores de una matriz A de $n \times n$ están contenidos en la unión de los círculos del plano complejo \mathbb{C} dados por

$$|z - a_{ii}| \leq r_i, \quad \text{donde } r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|,$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. Además, la unión de cualesquiera k de estos círculos que no intersecten a los $(n-k)$ restantes, debe contener precisamente k (contando multiplicidades) autovalores.

Ejercicio 12. Utilizar el teorema de Gerschgorin para localizar los autovalores de las siguientes matrices y determinar una cota del *radio espectral* $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|\}$,

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Métodos de factorización. Los algoritmos que proveen aproximaciones a todos los autovalores de una matriz constan, en general, de tres pasos: (1) transformar la matriz original (densa) a una forma condensada por transformaciones de semejanza ortogonales (y por lo tanto, con los mismos autovalores). Típicamente, una matriz simétrica es reducida a una matriz tri-diagonal, y una matriz general a una *matriz de Hessenberg superior*; (2) solución del problema de autovalores para la matriz condensada; (3) obtención de los autovectores de la matriz original aplicando la transformación inversa a los autovectores de la matriz condensada. Para el paso (1) existen métodos que efectúan la transformación en un número finito de pasos. Para el paso (2) los *métodos de factorización*, como QL y QR, son métodos *iterativos* eficientes para resolver el problema. La utilidad de esta estrategia resulta del hecho de que la manipulación computacional de una matriz condensada requiere de mucha menos operaciones que las correspondientes a una matriz densa.

Para el problema de autovalores, LAPACK incluye diversas rutinas aunque aquí sólo consideraremos las subrutinas de propósito general DSYEV y DGEEV para matrices *reales* (almacenadas en arreglos de *doble precisión*) simétricas y generales, respectivamente. Tales subrutinas implementan todos los pasos mencionados anteriormente en la solución del problema.

Ejercicio 13. Implementar un programa FORTRAN para el cálculo de los autovalores de una matriz simétrica y otro para una matriz general utilizando las rutinas DSYEV y DGEEV, respectivamente.

Ejercicio 14. Encontrar aproximaciones para los autovalores de las siguientes matrices simétricas,

$$\begin{pmatrix} 12 & 10 & 4 \\ 10 & 8 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 15. Encontrar aproximaciones a los autovalores de las siguientes matrices,

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 16. Determinar estimaciones para los autovalores de las siguientes matrices,

$$\begin{pmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180.01 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{pmatrix}.$$

¿Qué puede concluirse de los resultados?

Aplicación a las ecuaciones algebraicas.

Los métodos numéricos para calcular autovalores no involucran al polinomio característico, pues, en general, la resolución de la ecuación característica por algún método numérico para ecuaciones algebraicas es numéricamente inestable. De hecho, podemos utilizar los métodos numéricos de cálculo de autovalores para obtener los ceros de una ecuación algebraica de la forma $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ notando que ellos son las raíces del polinomio característico de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 17. Determinar los ceros de la ecuación $2x^5 - 12x^4 + 24x^3 - 24x^2 + 22x - 12 = 0$ utilizando el procedimiento descrito.

Aproximación discreta por mínimos cuadrados.

En general, los problemas que aparecen en la ciencia nos enfrentan a la observación de cantidades que cambian en el tiempo y/o el espacio. Supongamos que este cambio puede ser modelado por una relación matemática $y(x) = f(c_1, \dots, c_n; x)$ donde x es el parámetro que describe el cambio y c_1, \dots, c_n son n cantidades desconocidas, llamadas *parámetros del modelo*, cuyos valores queremos determinar. En

particular consideremos el caso en que el modelo es *lineal* en sus parámetros, esto es, la relación funcional f es lineal respecto de los parámetros c_1, \dots, c_n y por lo tanto puede expresarse como

$$f(c_1, \dots, c_n; x) = \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(x)$$

para n funciones $\phi_j(x)$ del parámetro x . Un conjunto de m observaciones de f proveerá de valores medidos y_i afectados de errores ϵ_i

$$\begin{aligned} y_i &= y(x_i) + \epsilon_i \\ &= \sum_{j=1}^n \phi_j(x_i) c_j + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Definiendo la *matriz de diseño*, $m \times n$, A de elementos $a_{ij} = \phi_j(x_i)$, el *vector de parámetros*, $n \times 1$, \mathbf{x} de elementos c_i , el *vector de medidas*, $m \times 1$, \mathbf{b} de elementos y_i , el *vector de residuos*, $m \times 1$, \mathbf{r} de elementos ϵ_i , el conjunto de ecuaciones anteriores puede escribirse matricialmente como

$$A \mathbf{x} + \mathbf{r} = \mathbf{b}.$$

Esta relación constituye nuestro modelo lineal de las observaciones. Si $m \geq n$ (más observaciones que parámetros) se trata ahora determinar el conjunto de parámetros \mathbf{x} que satisfaga mejor, en algún sentido, el modelo lineal. De acuerdo al *método de mínimos cuadrados*, los estimadores de mínimos cuadrados de los parámetros son aquellos valores que minimizan la norma euclídea de los residuos

$$\|\mathbf{r}\|_2 = \|\mathbf{b} - A \mathbf{x}\|_2 = (\mathbf{r}^t \mathbf{r})^{1/2}$$

Este requisito conduce a que la solución de mínimos cuadrados debe satisfacer las *ecuaciones normales*

$$(A^t A) \mathbf{x} = A^t \mathbf{b},$$

de donde se sigue que, cuando $A^t A$ es no-singular, la solución de mínimos cuadrados existe y es única. La condición *necesaria y suficiente* para la existencia de una solución única es que las columnas de la matriz A sean linealmente independientes o, dicho en forma equivalente, que el rango de la matriz A sea n . En tal caso, es fácil ver que la matriz $A^t A$ es simétrica y definida positiva², con lo cual un método numérico apropiado para resolver las ecuaciones normales es el

método de Choleski. Sin embargo, en la práctica, muy a menudo las columnas de A son aproximadamente linealmente dependientes lo cual conduce a un sistema de ecuaciones normales con una matriz mal condicionada. Por tal motivo resulta fundamental recurrir a otra forma de resolución numérica del problema. En particular el *método QR* evita la formación de las ecuaciones normales y garantizan la estabilidad de la solución frente a los errores de redondeo. Este método se basa en la existencia de la factorización QR de la matriz A $m \times n$, cuando la misma es de rango n ,

$$A = QR,$$

siendo Q es una matriz $m \times n$ cuyas columnas son una base ortonormal del espacio columna de A (con lo cual $Q^t Q = I_n$) y R es una matriz cuadrada de orden n triangular superior con elementos positivos sobre la diagonal. En tal caso las ecuaciones normales toman la forma

$$(QR)^t (QR) \mathbf{x} = (QR)^t \mathbf{b},$$

es decir

$$R^t R \mathbf{x} = R^t Q^t \mathbf{b}$$

y como R es no-singular, se obtiene $R \mathbf{x} = Q^t \mathbf{b}$. Así, conocida la factorización QR de A , la solución de mínimos cuadrados resulta, pues, por sustitución hacia atrás del sistema triangular superior

$$R \mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}, \quad \hat{\mathbf{b}} = Q^t \mathbf{b}.$$

La subrutina **DGELS** del paquete LAPACK efectúa este procedimiento para resolver el problema de mínimos cuadrados.

La teoría anterior puede ser aplicada en particular al caso en que la relación funcional del modelo lineal sea un polinomio de grado g a lo más ($n - 1$): $f(c_1, \dots, c_n; x) = \sum_{j=1}^n c_j x^{j-1} = c_1 + c_2 x + \dots + c_n x^{n-1}$. En este caso la matriz \mathbf{A} tiene elementos $a_{ij} = x_i^{j-1}$. Los estimadores de mínimos cuadrados conducen así al *ajuste de los datos observacionales por un polinomio de mínimos cuadrados*.

Ejercicio 18. Escribir un programa FORTRAN que calcule los coeficientes del polinomio de mínimos cuadrados de grado g que ajusta a un conjunto dado de datos (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$ ($m \geq n = g + 1$). *Indicación:* Construya la matriz de diseño del problema y utilice la subrutina **DGELS** para resolver el problema de mínimos cuadrados correspondiente.

²Esto es, $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$.

Ejercicio 19. Determine los polinomios de mínimos cuadrados de distintos órdenes para el siguiente conjunto de datos.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	-0.9	-0.7	-0.5	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
y_i	81.0	50.0	35.0	27.0	26.0	60.0	106.0	189.0	318.0	520.0

Ejercicio 20. El nivel de agua del Mar del Norte está determinado fundamentalmente por la denominada marea M_2 cuyo período es de alrededor de 12 horas y su expresión aproximada es

$$H(t) = h_0 + a_1 \sin \frac{2\pi t}{12} + a_2 \cos \frac{2\pi t}{12}$$

con t medido en horas. Hallar la expresión que ajusta por mínimos cuadrados las siguientes mediciones.

i	1	2	3	4	5	6
t_i	0	2	4	6	8	10
H_i	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8

Ayuda: Formar las ecuaciones normales para mostrar que en este caso particular $A^t A$ es una matriz diagonal.