Generación de condiciones iniciales para la esfera de Plummer

Pablo Santamaría

Vamos a considerar aquí la representación de un objeto dinámico conocido como *esfera de Plummer*. Esto es, nos proponemos distribuir N partículas en el espacio de fases (coordenadas–velocidades) de manera tal que la distribución de las posiciones $\mathbf{r}$ y velocidades $\mathbf{v}$ esté dada, a un tiempo inicial, por

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t = 0) = \begin{cases} \frac{24}{7} \frac{\sqrt{2}}{\pi^3} \frac{R^2}{G^5 M^4} (-E)^{7/2} & \text{si } E < 0, \\ 0 & \text{si } E \geq 0 \end{cases}$$

donde

$$E = U + \frac{v^2}{2}$$

es la energía por unidad de masa de cada partícula, R un cierto *radio crítico* y M la masa total del sistema. La densidad volumétrica de masa de esta distribución de partículas tiene simetría esférica y viene dada por

$$\rho(r, t = 0) = \frac{3}{4\pi} M R^{-3} \left[1 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{-5/2}$$

El potencial gravitatorio "generado" por este distribución es

$$U(r, t = 0) = -\frac{GM}{R} \left[1 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

y la energía potencial total de esta distribución es

$$E_p = -\frac{3\pi}{32} \frac{GM^2}{R}$$

en tanto que la energía *total* del sistema es

$$E_t = \frac{E_p}{2} = -\frac{3\pi}{64} \frac{GM^2}{R}$$

Finalmente indiquemos que la *velocidad de escape* de una partícula (esto es la mínima velocidad necesaria para que la partícula se desligue del sistema) está dada por

$$v_e = (-2U)^{1/2}$$

Comencemos disponiendo las partículas en el espacio de manera que se satisfaga la distribución de densidad de masa. La masa contenida en un volumen esférico a una distancia r del origen del centro de coordenadas está dada por

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(t) t^2 \mathrm{d}t$$

El cálculo de esta integral con la distribución másica correspondiente conduce a

$$\frac{M(r)}{M} = \left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-3/2}$$

Nótese que $0 \leq M(r)/M \leq 1$. Así por el método de transformación integral si $A_1 = M(r)/M$ un número aleatorio de una muestra con distribución uniforme en el rango $[0, 1]$ la ecuación anterior determina puntos sobre una esfera de radio r dado por

$$r = R\left[A_1^{-2/3} - 1\right]^{-1/2}, \quad 0 \leq A_1 \leq 1$$

que satisfacen la distribución de masa. Para obtener un punto al azar *sobre* esta esfera generamos en primer lugar un punto al azar sobre el eje z en el intervalo $[-r, r]$ a partir de un número A_2 al azar

$$z = (-1 + 2A_2)r \quad 0 \leq A_2 \leq 1$$

Tenemos así la proyección del vector $\mathbf{r}$ sobre el eje z y sobre el plano $x - y$, a saber,

$$\rho = (r^2 - z^2)^{1/2}$$

Podemos asignar coordenadas x y y al azar que cumplan esta relación tomando el ángulo ϕ que forma tal proyección con el eje x como un valor al azar en el rango $[0, 2\pi]$

$$\phi = 2\pi A_3, \quad 0 \leq A_3 \leq 1$$

con lo cual,

$$x = (r^2 - z^2)^{1/2}\cos(2\pi A_3)$$
$$y = (r^2 - z^2)^{1/2}\sin(2\pi A_3)$$

Las expresiones para r, x, y, z permiten asignar un punto $\mathbf{r}$ al azar que satisfaga la distribución que origina a la esfera de Plummer. Debemos asignarle ahora a este punto un vector velocidad $\mathbf{v}$ adecuado tal que satisfaga la distribución en el espacio de las fases. Para ello reescribamos primero tal distribución en función explícita de la velocidad reemplazando la expresión de E. Así para una partícula que pertenece al sistema, esto es, con $0 \leq v \leq v_e$,

$$f(r, v) = \frac{24\sqrt{2}}{7\pi^3}\frac{1}{M^{1/2}(GR)^{3/2}}\left[\left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-1/2} - \left(\frac{R}{GM}\right)\frac{v^2}{2}\right]^{7/2}$$

donde

$$v_e = \sqrt{2}\left(\frac{GM}{R}\right)^{1/2}\left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-1/4}$$

Debemos pues obtener, para un dado valor de r, un valor de v en el rango $[0, v_e]$ que satisfaga la distribución anterior. Para resolver este problema en vez de utilizar el método de transformación integral, utilizaremos el *método de Von Newmann.* Como función de comparación $g(v)$ consideramos la correspondiente a la distribución uniforme en el rango $[0, v_e]$, esto es, $g(v) = 1/v_e$ para $0 \leq v \leq v_e$. Entonces

$$\frac{f(r, v)}{g(v)} \leq v_e \operatorname*{Max}_{v\in[0,v_e]} f = v_e f(r, v = 0) \equiv c$$

y por lo tanto

$$\frac{f(r, v)}{cg(v)} = \frac{f(r, v)}{f(r, v = 0)} = \left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{7/4}\left[\left(1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^{-1/2} - \left(\frac{R}{GM}\right)\frac{v^2}{2}\right]^{7/2}$$

Sea entonces $v = A_4 v_e$, donde A_4 un número al azar en el rango $[0, 1]$ uniformemente distribuido. Utilizando la expresión de v_e resulta finalmente que

$$\frac{f(r, v_e A_4)}{cg(v)} = \left[1 - A_4^2\right]^{7/2}$$

Esta es la función para el método de Von Neumann. Tomando una sucesión de pares (A_4, A_5) de números al azar uniformemente distribuidos en el rango $[0, 1]$, aceptamos el valor $v = A_4 v_e$ si se satisface la desigualdad

$$A_5 \leq \left[1 - A_4^2\right]^{7/2}.$$

De este modo $v = A_4 v_e$ es un valor de la muestra que sigue la distribución requerida. Como antes, sólo obtenemos el módulo del vector velocidad. Para generar un vector al azar con este módulo procedemos en forma análoga al caso del vector posición:

$$\begin{aligned} v_z &= (-1 + 2A_6)v \\ v_x &= (v^2 - v_z^2)^{1/2} \cos(2\pi A_7) \\ v_y &= (v^2 - v_z^2)^{1/2} \sin(2\pi A_7) \end{aligned}$$

donde $0 \leq A_6, A_7 \leq 1$ son números al azar.