# Unidad 1

## Problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales ordinarias (a)

**Ejercicio 1.** Escribir cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias como un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

($a$) $y'' = t + y + y'$.

($b$) $y''' = y'' + t\,y$.

($c$) $y''' = y'' - 2\,y' + y + 1$.

($d$) La ecuación de Van der Pol:

$$y'' = y'(1 - y^2) - y.$$

($e$) La ecuación de Blasius:

$$y''' = -y\,y'''.$$

($f$) La segunda ley de Newton para el problema de dos cuerpos:

$$\begin{aligned} y_1'' &= -GMy_1/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}, \\ y_2'' &= -GMy_2/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.** Analice la estabilidad (matemática) del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2, \\ y_2' &= -2\,y_2. \end{aligned}$$

**Ejercicio 3.** Considérese el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y' &= -5\,y, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Determinaremos una solución numérica utilizando un paso $h = 0.5$.

($a$) ¿Es el problema (matemáticamente) estable?

($b$) El método de Euler aplicado con dicho paso, ¿es numéricamente estable?

($c$) Calcule la solución numérica a $t = 0.5$ con el método de Euler.

($d$) El método implícito de Euler aplicado con dicho paso, ¿es numéricamente estable?

($e$) Calcule la solución numérica a $t = 0.5$ con el método implícito de Euler.

($f$) Determine la solución numérica en el intervalo $[0, 10]$ con el método de Euler utilizando los pasos $h = 0.41, 0.4, 0.39$ y $0.15$. Grafique las soluciones obtenidas y comente sus resultados.

**Ejercicio 4.** Considérese el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y'' &= -y, \quad \text{para } t \geq 0, \\ y(0) &= 1, \quad y'(0) = 1. \end{aligned}$$

($a$) Expresar este problema de segundo orden como un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden, con sus apropiadas condiciones iniciales.

($b$) Analizar la estabilidad del sistema de ecuaciones diferenciales.

($c$) Efectuar un paso del método de Euler para este sistema con un paso $h = 0.5$ ¿Es el método numéricamente estable para este paso?

**Ejercicio 5.** Probar que el método de Heun es de orden 2 con respecto al paso $h$.

*Ayuda:* Notar que $h\tau_{i+1} = y_{i+1} - y_i - h\Phi(t_i, y_i; h, f) = E_1 + E_2$, donde $E_2 = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s - \frac{h}{2}\left[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})\right]$ y $E_2 = \frac{h}{2}\left[f(t_{i+1}, y_{i+1}) + f(t_{i+1}, y_i + hf(t_i, y_i))\right]$. Así, $E_1$ es el error debido a la integración numérica con la regla del trapecio y $E_2$ puede ser acotado por el error debido al uso del método de Euler.

**Ejercicio 6.** Supóngase que tenemos tres elementos químicos cuyas concentraciones son denotadas por $y_1$, $y_2$ y $y_3$. Si la tasa de reacción $y_1 \to y_2$ es proporcional a $y_1$, y la correspondiente a $y_2 \to y_3$ es proporcional a $y_2$, entonces las concentraciones están gobernadas por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} y_1' &= -k_1 y_1, \\ y_2' &= k_1 y_1 - k_2 y_2, \\ y_3' &= k_2 y_2, \end{aligned}$$

donde $k_1$ y $k_2$ son las tasas de dichas reacciones.

($a$) Asumiendo que las tasas de reacción son constantes y positivas, analice la estabilidad del sistema.

($b$) Determine bajo que condiciones el sistema será *stiff*.